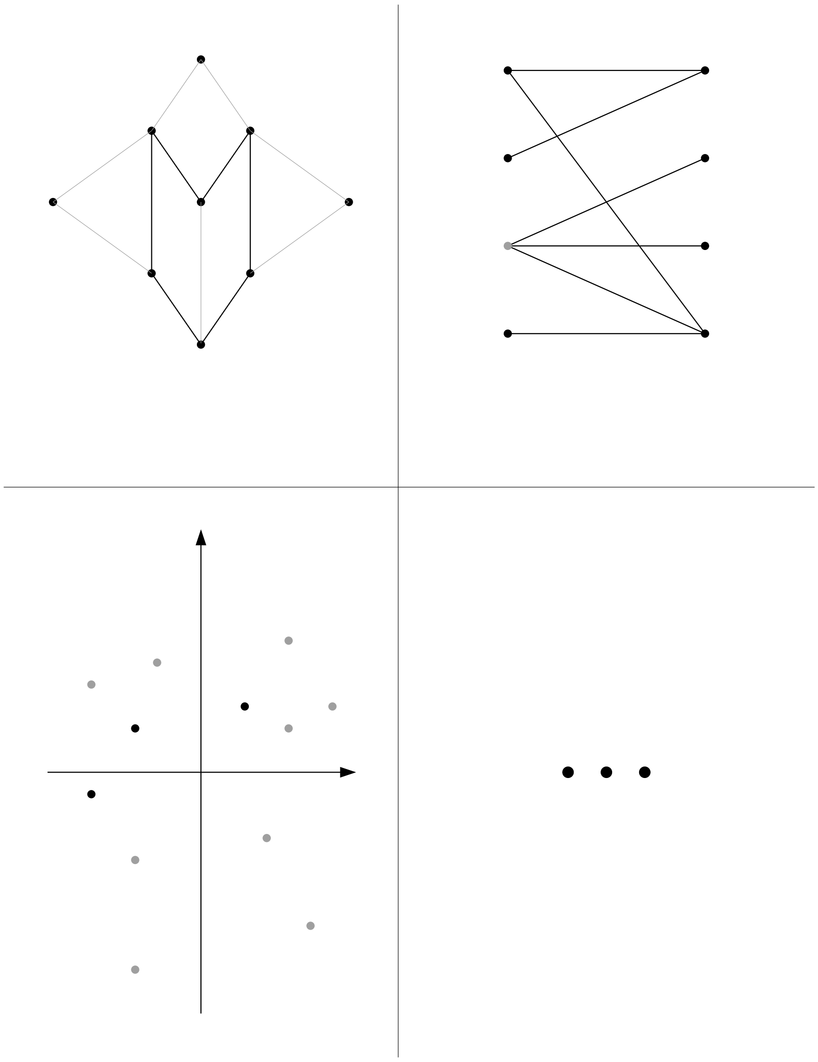
Matroider



Bachelorprojekt i matematik

Bjarke Hammersholt Roune — 20022404

Vejleder: Jørgen Brandt

14. juni 2005

Institut for Matematiske Fag
Aarhus Universitet

Forord

Jeg har efter bedste evne skrevet opgaven, som jeg selv ønsker at læse matematiske tekster. Det har ledt til en tekst, der på nogen punkter adskiller sig fra, hvad jeg ellers typisk har set.

Tingene er skrevet ud i megen detalje, for jeg bruger selv en del tid på at forlige de udeladte detaljer, når jeg læser matematik, og jeg synes egentlig, læserens tid kunne bruges mere givtigt end på dette.

Teksten tager efter min bedste evne alvorligt at være henvendt til en person, der intet ved om matroider, for at jeg kan blive bedre til at skrive forståeligt og præcist. Mange definitioner og sætninger er udtrykt både i ord og symboler, for ordene kan være hurtigere at forstå, men symbolerne er mere præcise.

Definitioner, sætninger og eksempler er konsekvent anmærket som sådan, for det gør teksten nemmere at forstå, huske og slå op i. Mange beviser er delt op i dele, der har navne med fede symboler, og underdele, der har navne med understregede symboler, for det gør dem nemmere at forstå og huske.

Alle sætninger, definitioner og eksempler har et notat om, hvor jeg har det fra, for det har lettet mit arbejde med teksten, og vil måske også være nyttigt for andre. Flere steder skriver jeg, at stoffet er mit eget, men det skal kun forstås sådan, at jeg selv har fundet på det. Jeg påstår på ingen måde at være den første til at tænke tanken. Det meste, jeg selv har fundet på, er ikke mærket med det.

Teksten er ofte kortfattet, for jeg har søgt at formulere mig kort og klart.

Sidste side indeholder ting, som der oftes refereres til, og den kan foldes ud.

Indholdet af teksten stammer fra [1], [2], [3], [4], men jeg har også kigget på [5], [6] og [7] i løbet af projektet.

Teksten er opdelt sådan, at første del introducerer et par eksempler på matroider og et antal forskellige matroidekarakteriseringer. Anden del berører dualitet og minorer. Tredie del beviser en række karakteriseringer af binære matroider herunder karakteriseringen ved ekskluderet minor. Fjerde del giver et kort indtryk af optimering og andre algoritmiske aspekter af matroider.

Meget af stoffet er udvalgt for at kunne gennemføre et bevis for karakteriseringen af binære matroider ved ekskluderet minor. Stoffet er dog ikke udelukkende valgt sådan, idet der også er givet tanke til at hver del skal afdække noget interessant og afsluttet om matroider.

Teksten er skrevet i LaTeX med amsart dokumentklassen, og jeg har lavet alle figurerne med IPE [8].

Jeg har været glad for at skrive om matroideteori, og er egentlig ked af, at der ikke er tid og plads til at behandle mere af emnet i opgaven. F.eks. er der et billede af en transversal matroide på forsiden, men transversale matroider berøres ikke i teksten. Jeg ville specielt gerne have lavet en mere grundig gennemgang af optimering og andre algoritmiske aspekter af matroideteori. Jeg ville også gerne have været inde på Tutte-polynomiet og transversale matroider.

Jeg vil gerne takke Jørgen Brandt for god vejledning og et interessant emne samt Jan Agentoft Nielsen for at læse korrektur.

Indhold

1. Grundlæggende om matroider

Matroideteori kan kort beskrives som en abstrakt teori om lineær uafhængighed, og i denne tekst defineres matroider ud fra dette perspektiv.

Matroideteori generaliserer imidlertid også overvældende meget andet end lineær uafhængighed. Der viser sig det besynderlige, at mange af de emner, som matroideteori generaliserer, også i en modificeret form kan bruges til at karakterisere matroider. Det er et tema, der tages op i dette afsnit.

I dette afsnit præsenteres definitionen af en matroide og derefter tre fundamentale typer af matroider. Herefter gennemgås en række grundlæggende koncepter, mange af hvilke giver anledning til en karakterisering af matroider.

Bemærk at der ofte skrives x for $\{x\}$, f.eks. skrives der $X \cup x$ fremfor $X \cup \{x\}$.

1.1. **Definition af en matroide.** Følgende definition er tiltænkt at lede tankerne i retning af lineær uafhængighed, og den er motivationen for at kalde matroideteori for en abstrakt teori om uafhængighed.

Definition 1 (Matroide)**.** *Lad E være en endelig mængde og lad $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Da er $M := (E, \mathcal{I})$ en* matroide *på E, når der gælder* [1, s. 7–8]

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
(I2) $\forall I \in \mathcal{I} \colon \mathcal{P}(I) \subseteq \mathcal{I}$
(I3) $\forall I_1, I_2 \in \mathcal{I} \colon\ |I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 - I_1 \colon I_1 \cup e \in \mathcal{I}$

Elementerne i $\mathcal{I}$ kaldes uafhængige *og dem i $\mathcal{P}(E) - \mathcal{I}$ kaldes* afhængige*. Mængden af afhængige mængder betegnes $\mathcal{D}(M) := \mathcal{P}(E) - \mathcal{I}$. Der defineres yderligere $\mathcal{I}(M) := \mathcal{I}$ og $E(M) := E$.*

Man kan mindre formelt forstå (I1)–(I3) som

(I1) Den tomme mængde er uafhængig.
(I2) Delmængderne af en uafhængig mængde er uafhængige.
(I3) Hvis I_1 og I_2 er uafhængige, og I_1 er mindre end I_2, kan I_1 udvides til en større uafhængig mængde med et element fra I_2.

Indskrænkningen til endelige E ovenfor kan virke kunstig, og der er da heller intet til hinder for at betragte uendelige matroider. Det giver dog en væsentligt anderledes teori, som ikke behandles her.

En af anvendelserne af denne antagelse om endelighed er, at det ofte sluttes, at en mængde har et minimalt henholdsvist maksimalt element, hvis bare mængden ikke er tom. Det er kun et gyldigt argument for endelige mængder.

Brugen af bogstaverne i og d for (u)afhængighed kan undre, men valget har sin forklaring i det engelske (in)dependence.

Overalt i teksten betegner $M := (E, \mathcal{I})$ en matroide, på nær hvor andet fremgår af sammenhængen.

1.2. **Vektormatroider.** Lineær uafhængighed i et vektorrum giver på følgende måde anledning til en fundamental klasse af matroider.

Sætning 2 (Vektormatroide)**.** *Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, lad $n \in \mathbb{N}$ og lad E være en endelig mængde. Lad $\{a_i\}_{i \in E}$ være en indekseret delmængde af $\mathbb{F}^n$. Lad* [1, 1.1.1, s. 8]

$$\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid \textit{Multimængden } \{a_i\}_{i \in X} \textit{ er lineært uafhængig over } \mathbb{F}\}$$

Så udgør $(E, \mathcal{I})$ en matroide.

Bevis. **(I1)**: Trivielt. **(I2)**: Trivielt. **(I3)**: Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Hvis $I_2 \subseteq \operatorname{span} I_1$ ville $|I_1| = \dim \operatorname{span} I_1 \geq \dim \operatorname{span} I_2 = |I_2|$, så der findes et $v \in I_2$ med $I_1 \cup v$ uafhængig. $\square$

Definition 3 (Vektormatroide)**.** *Lad $\mathbb{F}$, E og $\{a_i\}_{i\in E}$ være som ovenfor og lad A være matricen med a_i'erne som søjler, og hvor søjlen a_i udstyres med navnet i.*[1] *Matroiden fra ovenstående sætning kaldes da* vektormatroiden *af A og betegnes $M_{\mathbb{F}}[A]$ eller $M[A]$.* [1, s. 8]

Navnet "matroide" stammer fra ovenstående definition. Ideen med navne på vektorerne er at kunne holde styr på ellers identiske søjler. Der vil ikke i det følgende blive skelnet mellem et navn og vektoren, der har det navn. F.eks. skal en sum af søjlenavne opfattes som summen af de tilsvarende vektorer.[2]

Eksempel 4. Lad A være matricen nedenfor, hvor symbolerne over søjlerne angiver navne.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lad $M_v := M_{\mathbb{F}_2}[A]$. Så er $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$ og $\{2,3,5\}$ nogen af de uafhængige mængder, mens $\{1,2,5\}$, $\{3,4,5\}$ og $\{4,6\}$ er nogen af de afhængige.

Matroiden M_v vil gå igen i de kommende eksempler, og A er derfor indtegnet på bilag A. Jeg har selv lavet M_v, så alle udregningerne vedrørende M_v er mine egne.

1.3. **Cykelmatroider.** Vi skal nu se på matroider defineret ud fra cykler i grafer. De grafer, vi skal se på, er endelige, uden retning på kanterne, og både loops og parallelle kanter er tilladte. Typisk betragter man ikke grafer med parallelle kanter og loops, men det er nødvendigt af grunde, der bliver berørt i afsnit 2.

Hvis G er en graf med kantmængde E, skelnes der ikke mellem en delmængde $X \subseteq E$ og delgrafen af G med samme knudemængde men med kantmængde X.

Cykler i en graf giver på følgende måde anledning til en fundamental klasse af matroider.

Sætning 5 (Cykelmatroide)**.** *Lad G være en graf med kantmængde E. Lad $\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid X$ indeholder ikke en cykel$\}$. Så er $(E, \mathcal{I})$ en matroide.* [1, s. 11]

Bevis. **(I1)**: Trivielt. **(I2)**: Trivielt. **(I3)**: Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Da I_1 og I_2 er cykelfri, må der så være flere sammenhængskomponenter i I_1 end i I_2 og dermed også end i $I_1 \cup I_2$.[3] Altså må der være en kant $e \in I_1 \cup I_2$, som forbinder to sammenhængskomponenter i I_1, hvormed $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Da $e \notin I_1$ ses $e \in I_2$. $\square$ **eget bevis**

Definition 6 (Cykelmatroide)**.** *Hvis G er en graf, er* cykelmatroiden *af G matroiden fra ovenstående sætning. Denne betegnes $M[G]$.* [1, s. 11]

Eksempel 7. Lad G være grafen, som fremgår af figur 1(a) og lad $M_c := M[G]$. Nogle af de afhængige mængder i M_c er $\{7\}$, $\{1,7\}$, $\{5,6\}$ og $\{1,2,3,4\}$. Nogle af de uafhængige mængder er $\emptyset$, $\{1\}$ og $\{1,4,5\}$.

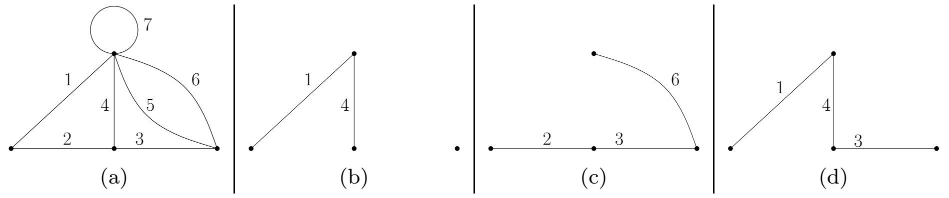
De uafhængige mængder $I_b := \{1,4\}$ og $I_c := \{1,3,6\}$ er indtegnet på figur 1(b) og 1(c). Da $|I_b| < |I_c|$ siger (I2), at der findes et $e \in I_c - I_b$ så $I_b \cup e$ er uafhængig. Det ses af figur 1(d) at $I_b \cup 3 \in \mathcal{I}$. Element 6 kunne også bruges, men 2 kan ikke, for $I_b \cup 2$ er en cykel.

[1] Da det ikke er så relevant for matroideteori, følger teksten [1] i at være meget vag med hensyn til, hvordan en matrix med navne på søjlerne er defineret. Man kunne definere en vektor $(1,0)$ med navn e som $(e,1,0)$.

[2] Ikke at skelne mellem en vektor og dens navn er praktisk, men det er også lidt utilfredsstillende. Hvis nu u og v er forskellige navne for to ens søjler, som begge er $(1,0)$, afhænger sandheden af $u = v$ af hvilket perspektiv, man anligger sig. Som vektorer har vi $u = (1,0) = v$, men som navne $u \neq v$. Forstået rigtigt er det altså sandt at $u = v \wedge u \neq v$, hvilket jo ikke ser så godt ud.

[3] En cykelfri graf kendes bedre som en skov, og det antages kendt, at antal sammenhængskomponenter i en skov er antal knuder minus antal kanter.

Matroiden M_c vil gå igen i de kommende eksempler, og G er derfor indtegnet på bilag A. Jeg har selv lavet M_c, så alle udregningerne vedrørende M_c er mine egne.



Figur 1. Illustration til eksempel 7

1.4. **Uniforme matroider.** Vi skal nu se på uniforme matroider. De viser sig at være mere interessante, end man umiddelbart skulle tro ud fra følgende definition.

Sætning 8 (Uniform matroide)**.** *Lad* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *med* $m \leq n$*. Lad* $E := \{1, \dots, n\}$ *hvor* $E = \emptyset$ *for* $n = 0$*. Lad* $\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid |X| \leq m\}$*. Så er* $(\mathcal{I}, E)$ *en matroide.* [1, 1.2.7, s. 19]

Bevis. **(I1)**: Trivielt. **(I2)**: Trivielt. **(I3)**: Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Lad $x \in I_2 - I_1$. Da $|I_1 \cup x| \leq |I_2| \leq m$ ses $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$. □

Definition 9 (Uniform matroide)**.** *Matroiden fra ovenstående sætning betegnes* $U_{m,n}$ *og kaldes en* uniform matroide*.* [1, 1.2.7, s. 19]

Eksempel 10. Matroiden $U_{2,4}$ er på $E = \{1, 2, 3, 4\}$ og har mængde af uafhængige mængder $\mathcal{I}(U_{2,4}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

1.5. **Isomorfi.** Vi skal nu se på en formalisering af, at to matroider er ens, dvs. at den ene fremkommer fra den anden blot ved at navngive elementerne anderledes.

Definition 11 (Isomorfi)**.** *To matroider* M_1 *og* M_2 *er* isomorfe*, hvilket skrives* $M_1 \simeq M_2$*, hvis der findes en bijektion* $\phi\colon E(M_1) \to E(M_2)$ *med* [1, 1.1.8, s. 12]

$$\forall X \subseteq E(M_1)\colon X \in \mathcal{I}(M_1) \Leftrightarrow \phi(X) \in \mathcal{I}(M_2)$$

Et sådant ϕ *kaldes en* isomorfi *mellem* M_1 *og* M_2*.*

Det ses let, at $\simeq$ er en ækvivalensrelation. Det vil i resten af teksten blive taget for givet, at alle matroideegenskaber er bevaret ved isomorfi.

Eksempel 12. Lad matricen $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ have søjler $v_1, \dots, v_4$. Lad $\phi\colon E(U_{2,4}) \to E(M[A])$ være givet ved $\phi(i) = v_i$. Da ses ϕ at være en isomorfi mellem den uniforme matroide $U_{2,4}$ og vektormatroiden $M_{\mathbb{F}_3}[A]$ så $U_{2,4} \simeq M_{\mathbb{F}_3}[A]$. [1, s. 20]

Definition 13 (Grafisk matroide)**.** *En matroide, der er isomorf med en cykelmatroide, kaldes* grafisk*.* [1, s. 12]

Definition 14 (Repræsenterbar, binær matroide)**.** *En matroide, der er isomorf med en vektormatroide* $M_{\mathbb{F}}[A]$*, kaldes* repræsenterbar *over* $\mathbb{F}$ *eller* $\mathbb{F}$-repræsenterbar*. Hvis en matroide er repræsenterbar over* $\mathbb{F}_2$ *kaldes den* binær*.* [1, s. 12, 20]

Det bemærkes uden bevis, at alle grafiske matroider er repræsenterbare over ethvert legeme jævnfør [1, 5.1.2, s. 138].

Eksempel 15. Ovenfor så vi, at $U_{2,4}$ er repræsenterbar, men vi vil nu vise, at den ikke er binær. Vi skal senere vise, at en matroide er binær hvis og kun hvis den ikke har $U_{2,4}$ som "delstruktur". [1, s. 20–21]

Antag $U_{2,4} \simeq M[A]$ hvor A har søjler $v_1, \dots, v_4 \in (\mathbb{F}_2)^n$. Da alle delmængder med **eget bevis** kardinalitet 2 er uafhængige og alle med kardinalitet 3 er afhængige har søjlerummet af A dimension 2. Altså er $\{v_1, v_2\}$ en basis, og vi kan uden tab af generalitet antage, at A består af koordinater i forhold til denne basis. Det giver $n = 2$ og $v_1 = (1,0)^*$ samt $v_2 = (0,1)^*$. Da $\{v_1, v_3\}$ og $\{v_2, v_3\}$ er uafhængige ses $v_3 = (1,1)^*$. Samme argument giver $v_4 = (1,1)^*$, men så er $\{v_3, v_4\}$ afhængig. Modstrid.

1.6. **Baser.** Vi skal nu se på en generalisering af baser i et lineært vektorrum. Hovedresultatet i dette afsnit er, at denne generalisering giver en alternativ karakterisering af matroider.

Definition 16 (Basis). *En basis af M er et $B \in \mathcal{I}$ med $\forall I \in \mathcal{I} \colon B \subseteq I \Rightarrow B = I$. Mængden af baser af M betegnes $\mathcal{B}(M)$.* [1, s. 16]

Baserne af M er altså de maksimale uafhængige mængder mht. inklusion.

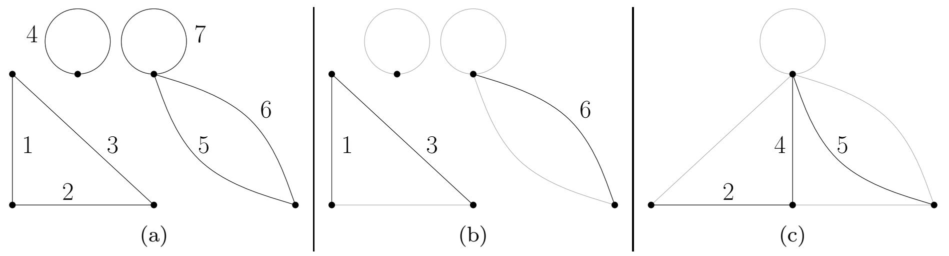
Eksempel 17. For en vektormatroide $M[A]$ gælder, at baserne i $M[A]$ navngiver de delmultimængder af søjler, som udgør baser af søjlerummet af A. [1, s. 20]

For M_c ses således, at $\{1,2,3\}$ og $\{1,5,6\}$ er baser, for de navngiver uafhængige søjler, og matricen har rang 3.

Eksempel 18. Baserne i $U_{m,n}$ er delmængderne med kardinalitet m. [1, 1.2.7, s. 19]

Eksempel 19. I en cykelgraf $M[G]$ er $X \subseteq E$ en basis, hvis og kun hvis den er et udspændende træ på hver sammenhængskomponent af G. Således er mængden på figur 2(b) en basis for cykelmatroiden til grafen på figur 2(a) og mængden på figur 2(c) er en basis for M_c. [1, s. 19]

Følgende er en liste af baserne af M_c, $\mathcal{B}(M_c) = \{\{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}\}$. Bemærk at de alle har samme størrelse.



FIGUR 2. Illustration til eksempel 19

Man kan på følgende måde finde de uafhængige mængder ud fra baserne.

Lemma 20. *Der gælder $\mathcal{I} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(M)} \mathcal{P}(B)$.* baseret på [1, 1.2.3, s. 17]

Bevis. $\subseteq$: Lad $I \in \mathcal{I}$. Da E er endelig, kan vi lade B være en maksimal mængde i $\mathcal{I}$ mht. inklusion under kravet $I \subseteq B$. Da ses $B \in \mathcal{B}(M)$ hvormed $I \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}(M)} \mathcal{P}(B)$.

$\supseteq$: Følger umiddelbart af (I2). □

Følgende er et eksempel på, at baser i matroider ligner baser fra vektorrum.

Lemma 21. *Baserne i M er de maksimale uafhængige mængder med hensyn til kardinalitet, dvs.* baseret på [1, 1.2.1, s. 16]

(i) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M) \colon |B_1| = |B_2|$
(ii) $\forall B \in \mathcal{B}(M), I \in \mathcal{I} \colon |B| = |I| \Rightarrow I \in \mathcal{B}(M)$

Bevis. **(i)**: Antag B_1 og B_2 er baser og $|B_1| < |B_2|$. Så giver (I3) et $x \in B_2 - B_1$ så $B_1 \cup x$ er uafhængig. Det er i modstrid med maksimaliteten af B_1 mht. inklusion.

(ii): Antag B er en basis, I er uafhængig og $|B| = |I|$. Så findes per 20 en basis B' med $I \subseteq B'$. Af (i) ses $|B'| = |B| = |I|$ hvormed $I = B'$. □

Nu til den lovede karakterisering.

Sætning 22 (Karakterisering af matroider ved baser[4])**.** *Lad $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Da findes en matroide M på E så $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ hvis og kun hvis* baseret på [1, 1.2.5, s. 18]

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 - B_2 \exists y \in B_2 - B_1 \colon (B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

og en matroide er entydigt givet ved dens baser.

Bevis. Følger umiddelbart af 20 samt 23 og 25 nedenfor. □

Man kan mindre formelt forstå (B1) og (B2) som

(B1) Der findes mindst 1 basis.

(B2) Givet baser B_1 og B_2 fremkommer en basis ved i B_1 at bytte et element i $B_1 - B_2$ ud med et fra $B_2 - B_1$.

Lemma 23. $\mathcal{B}(M)$ *opfylder* (B1) *og* (B2). [1, s. 16–17]

Bevis. **(B1)**: Da $\mathcal{I} \neq \emptyset$ per (I1) og $\mathcal{I}$ er endelig, eksisterer der (mindst) en maksimal mængde mht. inklusion i $\mathcal{I}$. Denne ses at være en basis.

(B2): Antag $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ og $x \in B_1 - B_2$. Af 21(i) ses $|B_1 - x| < |B_2|$, så (I3) giver et $y \in B_2 - (B_1 - x) = B_2 - B_1$ med $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{I}$. Af 21(ii) ses $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. □

For at bevise 25 og dermed 22 får vi brug for følgende.

Lemma 24. *Lad $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Antag $\mathcal{B}$ opfylder* (B2)*. Da gælder $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \colon |B_1| = |B_2|$.* [1, 1.2.4, s. 17]

Bevis. Antag for at få en modstrid at der findes 2 elementer i $\mathcal{B}$ med forskellige størrelser. Da $\mathcal{B}$ er endelig, kan vi da lade $(B_1, B_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ minimere $B_1 - B_2$ mht. inklusion under kravet $|B_1| > |B_2|$. Lad $x \in B_1 - B_2$. (B2) giver så, at der findes et $y \in B_2 - B_1$ med $B' := (B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. Det er i modstrid med minimaliteten af $B_1 - B_2$ da $|B'| = |B_1| > |B_2|$ og $B' - B_2 = (B_1 - B_2) - x \subsetneq B_1 - B_2$. □

Vi kan nu fuldføre beviset for 22 ved at bevise 25.

Lemma 25. *Lad $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Antag $\mathcal{B}$ opfylder* (B1) *og* (B2)*. Lad $\mathcal{I} := \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{P}(B)$. Så er $M := (E, \mathcal{I})$ en matroide med $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$.* [1, 1.2.3, s. 17]

Bevis. **(I1)**: Følger umiddelbart af (B1). **(I2)**: Trivielt.

(I3): Det følgende er illustreret med figur 3. **(I3) er eget bevis**

Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Så findes $B_2 \in \mathcal{B}$ med $I_2 \subseteq B_2$. Da $\mathcal{B}$ er endelig, kan vi lade B_1 maksimere $(B_1 - I_1) \cap B_2$ mht. inklusion under kravet $I_1 \subseteq B_1 \in \mathcal{B}$.

[4] Sætningen er baseret på [1, 1.2.5 s. 18], der dog har et problem med formuleringen. Der står “then $\mathcal{B}$ is the collection of bases of a matroid on E if and only if [...]”. Jeg kan ikke se andre fornuftige måder at tolke dette på end

$$\forall \mathcal{B} \subseteq E \colon ((\exists M \text{ matroide på } E \colon \mathcal{B} = \mathcal{B}(M)) \Leftrightarrow \text{(B1)} \wedge \text{(B2)})$$

men det udelukker ikke, at 2 forskellige matroider kan have de samme baser. Altså udtrykker det *ikke*, at man kan karakterisere matroider ved baser, hvilket man skulle tro var meningen. Det er derfor, jeg i beviset for sætningen er nødt til at henvise til 20, da 23 og 25 ikke giver entydigheden. Jeg har ikke i [1] fundet noget tilsvarende 20, men den er selvfølgelig også ret indlysende. Samme problematik gør sig gældende for [1, 1.1.5, s. 10], [1, 1.3.4, s. 25] og [1, 1.4.6, s. 30]. For 1.1.5 og 1.3.4 er entydigheden dog berørt andetsteds i [1], men ikke i tilknytning til sætningerne.

Antag for at få en modstrid $x \in (B_1 - I_1) - B_2$. Per (B2) findes et $y \in B_2 - B_1$ så $B' := (B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$. Her af ses $(B_1 - I_1) \cap B_2 \subsetneq (B' - I_1) \cap B_2$ og $I_1 \subseteq B'$ jævnfør $y \notin B_1 \supseteq I_1$. Det er i modstrid med maksimaliteten af B_1, så $B_1 - I_1 \subseteq B_2$.

Antag for at få en modstrid $(B_1 - I_1) \cap I_2 = \emptyset$. Det giver sammen med $B_1 - I_1 \subseteq B_2$ at $B_1 - I_1 \subseteq B_2 - I_2$. Af 24 følger i modstrid hermed at

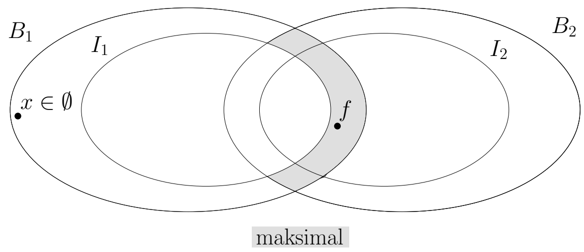
$$|B_1 - I_1| = |B_1| - |I_1| = |B_2| - |I_1| > |B_2| - |I_2| = |B_2 - I_2|$$

så der findes $f \in (B_1 - I_1) \cap I_2$.

Vi har nu $f \in I_2 - I_1$ og da $I_1 \cup f \subseteq B_1$ ses $I_1 \cup f \in \mathcal{I}$.

$\boldsymbol{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(M)}$: Lad $B \in \mathcal{B}, I \in \mathcal{I}$ og antag $B \subseteq I$. Der findes $B' \in \mathcal{B}$ så $B \subseteq I \subseteq B'$. Per 24 ses $B = B'$ så $B = I$. Da $B \in \mathcal{I}$ giver det $B \in \mathcal{B}(M)$.

$\boldsymbol{\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}(M)}$: Lad $B \in \mathcal{B}(M)$. Da $B \in \mathcal{I}$ findes et $B' \in \mathcal{B}$ med $B \subseteq B'$. Da $B' \in \mathcal{I}$ giver definitionen af en basis $B = B'$ hvormed $B \in \mathcal{B}$. □



Figur 3. Illustration til beviset for 25(I3)

1.7. **Cykler.** Vi skal nu se på en generalisering af cykler i en graf. Hovedresultatet er, at det ligesom med baser giver en alternativ karakterisering af matroider.

Definition 26 (Cykel)**.** *Mængden C er en* cykel *af M, når der gælder $C \in \mathcal{D}(M)$ og $\forall X \in \mathcal{D}(M)\colon X \subseteq C \Rightarrow X = C$. Mængden af cykler af M betegnes $\mathcal{C}(M)$.* [1, s. 9]

Cyklerne af M er altså de minimale afhængige mængder mht. inklusion.

Eksempel 27. Cyklerne i cykelmatroiden $M[G]$ er simpelthen cyklerne i grafen G, hvilket motiverer navnet "cykel". Følgende er en liste af cyklerne i M_c, $\mathcal{C}(M_c) = \{\{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{5,6\}, \{7\}\}$. [1, 1.1.7, s. 11]

Eksempel 28. Cyklerne i $U_{m,n}$ er delmængderne af kardinalitet $m+1$. Det ses, at matroiderne $U_{n,n}$ op til isomorfi er de eneste, som ikke har nogen cykler. [1, 1.2.7, s. 19]

Man kan på følgende måde finde de afhængige mængder ud fra cyklerne.

Lemma 29. *Der gælder $\mathcal{D}(M) = \{X \subseteq E \mid \exists C \in \mathcal{C}(M)\colon C \subseteq E\}$.* [1, s. 9]

Bevis. $\subseteq$: Lad $X \in \mathcal{D}(M)$. Da $\mathcal{D}(M)$ er endelig, kan vi lade C være en minimal mængde mht. inklusion i $\mathcal{D}(M)$ under kravet $C \subseteq X$. Det ses at $C \in \mathcal{C}(M)$.

$\supseteq$: Antag $C \in \mathcal{C}(M)$ og $C \subseteq X$. Da $C \in \mathcal{D}(M)$ giver (I2) at $X \in \mathcal{D}(M)$. □

Nu til den lovede karakterisering.

Sætning 30 (Karakterisering af matroider ved cykler)**.** *Lad $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Da findes en matroide M på E så $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ hvis og kun hvis* baseret på [1, 1.1.5, s. 10]

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$
(C2) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}\colon C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$
(C3) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}\colon C_1 \neq C_2 \Rightarrow \forall e \in C_1 \cap C_2 \exists C \in \mathcal{C}\colon C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

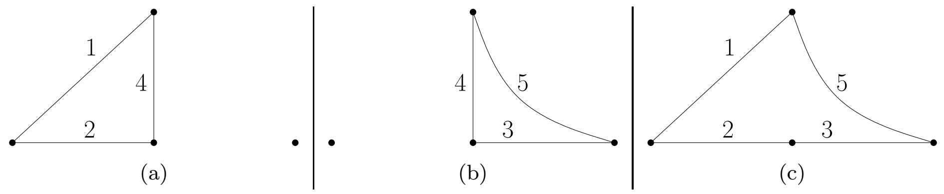
og en matroide er entydigt givet ved dens cykler.

Bevis. Følger umiddelbart af 29 samt 32 og 33 nedenfor. □

Man kan mindre formelt forstå (C1)-(C3) som

(C1) Den tomme mængde er ikke en cykel.
(C2) Ingen cykel er indeholdt i en anden.
(C3) Foreningen af to forskellige cykler fraregnet et fælles element indeholder en cykel.

Eksempel 31. Betragt matroiden M_c og definer $C_a := \{1, 2, 4\}$, $C_b := \{3, 4, 5\}$ og $C_c := \{1, 2, 3, 5\}$. Disse fremgår af figur 4. Så ses $4 \in C_a \cap C_b$, og $C_c \subseteq (C_a \cap C_b) - 4$. Dette er en illustration af (C3), som siger, at der altid findes et sådant C_c.



Figur 4. Illustration til eksempel 31

Lemma 32. *$\mathcal{C}(M)$ opfylder* (C1)-(C3). [1, s. 9]

Bevis. **(C1)**: Følger umiddelbart af (I1).

(C2): Lad $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Da C_1 er afhængig, giver definitionen for at C_2 er en cykel med C_1 som X at $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$.

(C3): Det følgende er illustreret med figur 5. **(C3) er egen modifikation af** [1, 1.1.3, s. 9]

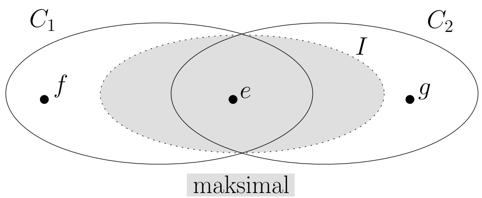
Lad $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ med $C_1 \neq C_2$ og antag $e \in C_1 \cap C_2$.

Hvis $C_1 \cap C_2 = C_1$ ville $C_1 \subseteq C_2$ i modstrid med (C2), så $C_1 \cap C_2 \subsetneq C_1$. Hermed er $C_1 \cap C_2$ uafhængig, da cyklen C_1 ikke strengt kan indeholde en afhængig mængde. Da $C_1 \cup C_2$ er endelig, kan vi dermed lade I være en maksimal uafhængig mængde mht. inklusion under kravet $C_1 \cap C_2 \subseteq I \subseteq C_1 \cup C_2$.

Hvis $C_1 - I = \emptyset$ ville $C_1 \subseteq I$ i modstrid med (I2), så der findes $f \in C_1 - I$ og tilsvarende $g \in C_2 - I$. Det gælder at $f \neq g$, for ellers ville $f \in C_1 \cap C_2 \subseteq I$. Da $I \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{f, g\}$ ses

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) - \{f, g\}| < |(C_1 \cup C_2) - e|$$

Antag at $(C_1 \cup C_2) - e$ ikke indeholder en cykel, hvormed den per 29 er uafhængig. Per (I3) findes hermed et $h \in ((C_1 \cup C_2) - e) - I$, hvor $I \cup h$ er uafhængig. Det er i modstrid med maksimaliteten af I, så $(C_1 \cup C_2) - e$ indeholder en cykel. □



Figur 5. Illustration til beviset for 32(C3)

Lemma 33. *Lad $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Antag $\mathcal{C}$ opfylder* (C1)–(C3). *Lad $\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid \forall C \in \mathcal{C} \colon C \nsubseteq X\}$. Så er $M := (E, \mathcal{I})$ en matroide med $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$.* [1, 1.1.4, s. 10]

Bevis. **(I1)**: Følger umiddelbart af (C1).

(I2): Hvis I ikke indeholder noget $C \in \mathcal{C}$, gør delmængderne af I det heller ikke.

(I3): Det følgende er illustreret med figur 6.

Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Lad I_3 være et element i $\mathcal{I}$ som minimerer $I_1 - I_3$ mht. inklusion under kravene at $|I_3| > |I_1|$ og $I_3 \subseteq I_1 \cup I_2$. Et sådant I_3 eksisterer, da I_2 opfylder kravene, og $I_1 \cup I_2$ er endelig.

Hvis $I_1 \subseteq I_3$ er det ønskede vist, så antag for at få en modstrid at $e \in I_1 - I_3$.

Definer $T_f := (I_3 \cup e) - f$ for $f \in I_3 - I_1$. T_f er altså resultatet af at bytte f ud med e i I_3. Det gør det klart at $|T_f| = |I_3|$, $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ og $I_1 - T_f \subsetneq I_1 - I_3$. Så giver minimaliteten af I_3 at $T_f \notin \mathcal{I}$, dvs. T_f indeholder et $C_f \in \mathcal{C}$.

Antag $C_f \cap (I_3 - I_1) = \emptyset$. Da $C_f \subseteq I_1 \cup I_3$ giver det $C_f \subseteq I_1$ i modstrid med (I2), så $C_f \cap (I_3 - I_1) \neq \emptyset$.

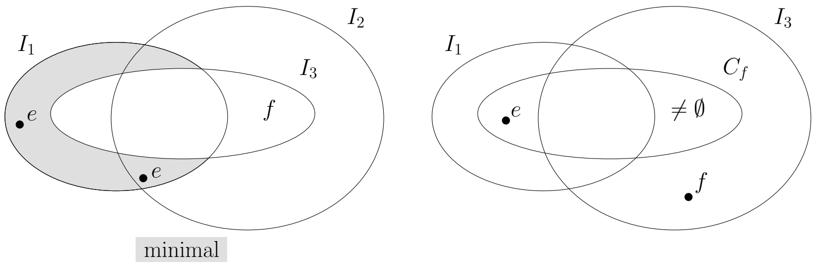
Hvis $e \notin C_f$ ville $C_f \subseteq T_f - e \subseteq I_3$ i modstrid med (I2), så $e \in C_f$.

Lad $g \in I_3 - I_1$ og $h \in C_g \cap (I_3 - I_1)$. Da $h \in C_g$ og $h \notin C_h$ ses $C_g \neq C_f$. Vi har yderligere $e \in C_g \cap C_h$, så (C3) giver et $C \in \mathcal{C}$ med $C \subseteq (C_g \cup C_h) - e$. Da $C_g \cup C_h \subseteq I_3 \cup e$ ses $C \subseteq I_3$, hvilket er i modstrid med (I2).

$\boldsymbol{\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)}$: Bemærk først at $\mathcal{D}(M) = \{X \subseteq E \mid \exists C \in \mathcal{C} \colon C \subseteq X\}$.

$\subseteq$: Antag $C \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{D}(M)$ og $X \subseteq C$. Per ovenstående findes et $C' \in \mathcal{C}$ så $C' \subseteq X \subseteq C$. Per (C2) har vi $C' = C$ hvormed $X = C$. Dette medfører $C \in \mathcal{C}(M)$.

$\supseteq$: Antag istedet $C \in \mathcal{C}(M)$. Da $C \in \mathcal{D}(M)$ findes et $C' \in \mathcal{C}$ med $C' \subseteq C$. Da $C' \in \mathcal{D}(M)$ giver det per definitionen af $\mathcal{C}(M)$ at $C' = C$ hvormed $C \in \mathcal{C}$. □



Figur 6. Illustration til beviset for 33(I3)

Følgende sætning giver en måde at tænke på cykler i en vektormatroide, der måske er mere oplysende, end at de er de minimale afhængige mængder.

Sætning 34. *Lad $I \in \mathcal{I}$ og lad $x \in E - I$ være en linearkombination af elementerne i I, hvor alle skalarerne er forskellige fra nul. Så er $I \cup x$ en cykel af M, og alle cykler af M kan frembringes på denne måde. Dvs.*[5] **egen opdagelse**

$$\mathcal{C}(M) = \left\{ I \cup x \;\middle|\; I \in \mathcal{I} \wedge x \in E - I \wedge \exists \{\lambda_e\}_{e \in I} \subseteq \mathbb{F} - \{0\} \colon \sum_{e \in I} \lambda_e e = x \right\}$$

Bevis. $\subseteq$: Lad $C \in \mathcal{C}(M)$ og $x \in C$. Da $C - x$ er uafhængig, og C er afhængig, findes skalarer $\lambda_e \in \mathbb{F}$ så $x = \sum_{e \in C - x} \lambda_e e$. Hvis der fandtes $e \in C - x$ så $\lambda_e = 0$ havde vi en afhængighedsrelation for $C - e$ i modstrid med C er en cykel. **eget bevis**

[5] Læseren opfordres til at overveje, hvornår symbolet x skal opfattes som en vektor, hvornår det skal opfattes som et navn, og hvorfor følgende udsagn enten er meningsløst eller forkert.

$$\mathcal{C}(M) = \left\{ I \cup \sum_{e \in I} \lambda_e e \mid I \in \mathcal{I} \wedge \forall e \in I \colon \lambda_e \in \mathbb{F} - \{0\} \right\}$$

$\supseteq$: Lad I være uafhængig. Lad $\{\lambda_e\}_{e\in I} \subseteq \mathbb{F} - \{0\}$ og $x := \sum_{e\in I} \lambda_e e$ med $x \in E - I$. Vi skal vise, at $I \cup x$ er en cykel. Lad $f \in I$ og $I' := (I \cup x) - f$. Da $f = \frac{1}{\lambda_f}(x - \sum_{e\in I-\{f\}} \lambda_e e)$ ses $\operatorname{span}(I') = \operatorname{span}(I \cup x) = \operatorname{span} I$. Da $|I'| = |I|$ er I' dermed uafhængig. Her af ses, at $I \cup x$ er en cykel. □

Næste sætning udtrykker et fornøjeligt samspil mellem cykler og uafhængighed, og den kan motiveres ved at tænke på en cykelmatroide eller ovenstående sætning.

Sætning 35. *Lad $I \in \mathcal{I}$ og $e \in E$ med $I \cup e \in \mathcal{D}(M)$. Da indeholder $I \cup e$ en og kun en cykel, og denne indeholder e.* [1, 1.1.6, s. 11]

Bevis. Per 29 findes et $C \in \mathcal{C}(M)$ med $C \subseteq I \cup e$. Vi har $e \in C$ da ellers $C \subseteq I$ i modstrid med (I2). C er entydig, for hvis $C' \in \mathcal{C}(M) - \{C\}$ og $C' \subseteq I \cup e$ ville (I3) give en cykel indeholdt i $C \cap C' - e \subseteq I$. □

Definition 36 (Fundamental cykel)**.** *Lad $B \in \mathcal{B}(M)$ og $e \in E - B$. Cyklen fra 35 indeholdt i $B \cup x$ kaldes da den* fundamentale cykel *til e mht. B og betegnes $C_M(e, B)$.* [1, 1.2.6, s. 18]

Eksempel 37. Man kan bruge 34 til at finde fundamentale cykler i en vektormatroide. Lad $v_1, \ldots, v_6$ være søjlerne fra matricen, som blev brugt til at definere M_v. Vi har $B := \{1, 2, 3\} \in \mathcal{B}(M_v)$, og vi vil nu bestemme $C_{M_v}(5, B)$. Vi ser at $v_5 = v_1 + v_2$.[6] Så siger 34 at $\{1, 2, 5\} \in \mathcal{C}(M_v)$, og vi ser $C_{M_v}(5, B) = \{1, 2, 5\}$.

Denne metode kan anvendes i en vilkårlig vektormatroide til at finde den entydige cykel fra 35, dvs. den begrænser sig ikke til tilfældet $I \in \mathcal{B}(M)$.

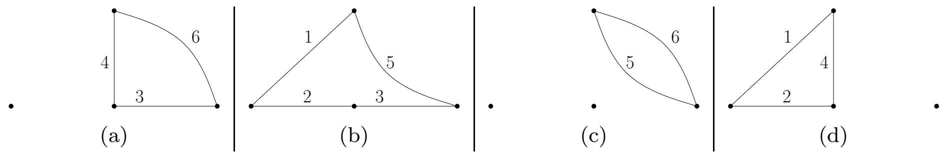
Det viser sig, at (C3) skærpes på følgende måde, hvilket er illustreret med eksempel 39 nedenfor.

Sætning 38. *Kravet* (C3) *i 30 kan udskiftes med følgende* [1, Øvelse 1.1.11, s. 16]

$$(\mathrm{C3})'\colon \forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} \forall e \in C_1 \cap C_2 \forall f \in C_1 - C_2 \exists C \in \mathcal{C}\colon f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$$

Bevis. Da (C3)′ umiddelbart medfører (C3), er det tilstrækkeligt at vise, at (C3)′ gælder for $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$. Dette kan godt vises på nuværende tidspunkt, men beviset er ikke pænt. Derfor udskydes beviset ved at referere til 69. □

Eksempel 39. Dette eksempel er illustreret med figur 7. Lad $C_a := \{3, 4, 6\}$ og $C_b := \{1, 2, 3, 5\}$. Vi har at $C_a - C_b = \{4, 6\}$ samt at $3 \in C_a \cap C_b$, og i overensstemmelse med (C3)′ ses der at findes cykler $C_c := \{5, 6\}$ og $C_d := \{1, 2, 4\}$, som opfylder at $6 \in C_c \subseteq (C_a \cup C_b) - 3$ og $4 \in C_d \subseteq (C_a \cup C_b) - 3$.



FIGUR 7. Illustration til eksempel 39

1.8. **Restriktion.** Vi skal nu se på en naturlig måde at udtage delstrukturer af en matroide.

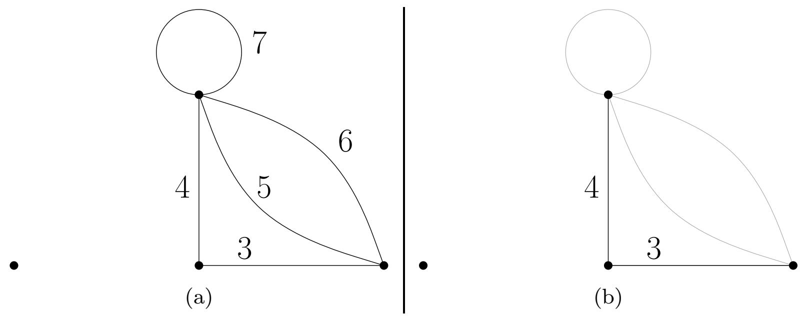
Sætning 40. *For $X \subseteq E$ udgør $(X, \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(X))$ en matroide.* [1, s. 22]

[6]Nu skelner vi jo ganske vist ikke mellem navne og vektorer, men "5 = 1 + 2" er skidt.

Bevis. **(I1)**: Trivielt. **(I2)**: Trivielt. **(I3)**: Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(X)$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Så findes per (I3) for M et $e \in I_2 - I_1$ så $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Da $e \in X$ ses $I_1 \cup e \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(X)$. □

Definition 41 (Restriktion)**.** *Matroiden fra ovenstående sætning betegnes $M|X$ og kaldes* restriktionen *af M til X.* [1, s. 22]

Eksempel 42. Vi ser på restriktionen $M := M_c|\{3,4,5,6,7\}$ af M_c. Så er M cykelmatroiden af grafen på figur 8(a), og vi ser, at $\mathcal{I}(M) = \{\{3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5\}, \{6\}\}$. Heraf ses $\{3,4\} \in \mathcal{B}(M)$ jævnfør figur 8(b).



FIGUR 8. Illustration til eksempel 42

Eksempel 43. For $X \subseteq E(U_{n,m})$ gælder $U_{n,m}|X \simeq U_{\min(n,|X|),|X|}$.

Restriktion er defineret ud fra hvilken mængde, man gerne vil beholde, men man kunne lige så godt have defineret det ud fra, hvad man gerne vil fjerne. Dette leder til begrebet om sletning.

Definition 44 (Sletning)**.** *Givet $T \subseteq E$ kaldes matroiden $M|(X - T)$* sletningen *af T fra M og betegnes $M \backslash T$.* [1, s. 22]

Eksempel 45. Det ses at $M_c|\{3,4,5,6,7\} = M_c \backslash \{1,2\}$.

Eksempel 46. For en vektormatroide $M[A]$ og $T \subseteq E(M[A])$ kan $M[A] \backslash T$ repræsenteres som $M[B]$, hvor B er som matricen A, men hvor søjlerne, som er navngivet i T, er fjernet.

1.9. **Rang.** Vi skal nu se på en generalisering af rangen af en matrix. Hovedresultatet er, at dette giver endnu en karakterisering af matroider.

Definition 47 (Rang og rangfunktion)**.** Rangen *af en matroide er den fælles størrelse af dens baser, jævnfør 21 og* (B1). Rangen *af en delmængde $X \subseteq E$ er rangen af matroiden $M|X$. Dette definerer* rangfunktionen $r_M : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ *af M.* [1, s. 22]

Det følger umiddelbart, at $r_M(E)$ er rangen af M. Af 21 ses, at man kan tænke på $r_M(X)$ som den maksimale kardinalitet blandt de uafhængige mængder, som er indeholdt i X.

Eksempel 48. I eksempel 19 så vi at $\{2,4,5\} \in \mathcal{B}(M_c)$, så M_c har rang 3. Vi har $r_{M_c}(\{3,4,5,6,7\}) = |\{3,4\}| = 2$, for vi så i eksempel 42 at $\{3,4\} \in \mathcal{B}(M_c|\{3,4,5,6,7\})$.

Eksempel 49. Rangen af en vektormatroide $M[A]$ er simpelthen rangen af matricen A. Rangen af $X \subseteq E(M[A])$ er rangen af matricen, som består af søjlerne navngivet i X. Således har $\{1,4,6\}$ rang 2 i M_v, mens M_v selv har rang 3.

Man kan på følgende måde finde de uafhængige mængder ud fra rangfunktionen.

Lemma 50. *Der gælder* $\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid r_M(X) = |X|\}$. [1, 1.3.5(i), s. 25]

Bevis. $\subseteq$: Lad $I \in \mathcal{I}$. Da ses $I \in \mathcal{B}(M|I)$ hvormed $r_M(X) = |I|$.
$\supseteq$: Antag $r_M(X) = |X|$. Da findes $B \in \mathcal{B}(M|X)$ med $|X| = r_M(X) = |B|$. Da $B \subseteq X$ giver det $X = B \in \mathcal{I}$. □

Nu til den lovede karakterisering.

Sætning 51 (Karakterisering af matroider ved rangfunktioner)**.** *Lad* $r\colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ *for en endelig mængde* E*. Da findes en matroide* M *på* E *så* $r = r_M$ *hvis og kun hvis* baseret på [1, 1.3.4, s. 25]

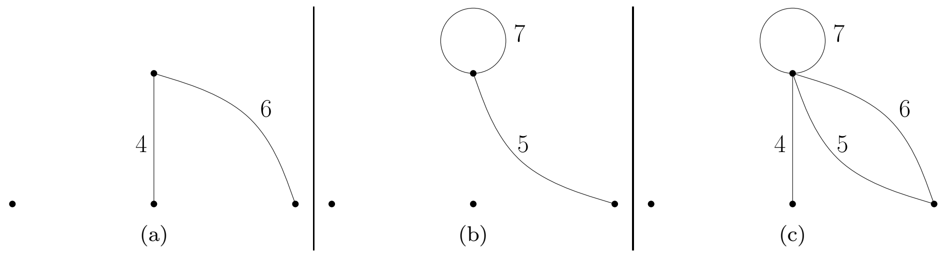
(R1) $\forall X \subseteq E\colon r(X) \leq |X|$
(R2) $\forall X, Y \subseteq E\colon X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$
(R3) $\forall X, Y \subseteq E\colon r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

og en matroide er entydigt givet ved dens rangfunktion.

Bevis. Følger umiddelbart af 50 samt 53 og 55 nedenfor. □

Eksempel 52. Der kan i (R3) fint gælde skarp ulighed. Betragt M_c og definer $X_a := \{4, 6\}$ og $X_b := \{5, 7\}$ jævnfør figur 9(a) og 9(b). Vi har så $X_a \cup X_b = \{4, 5, 6, 7\}$ og $X_a \cap X_b = \emptyset$ jævnfør figur 9(c). Det ses at

$$r_{M_c}(X_a \cup X_b) + r_{M_c}(X_a \cap X_b) = 2 + 0 < 2 + 1 = r_{M_c}(X_a) + r_{M_c}(X_b)$$



FIGUR 9. Illustration til eksempel 52

Lemma 53. r_M *opfylder* (R1)–(R3). [1, 1.3.1, s. 23]

Bevis. **(R1)**: Trivielt. **(R2)**: Trivielt. **(R3)**: Lad $X, Y \subseteq E$. Lad $B_\cap \in \mathcal{B}(M|X \cap Y)$. Da $B_\cap \in \mathcal{I}(M|X \cup Y)$ findes et $B_\cup \in \mathcal{B}(M|X \cup Y)$ med $B_\cap \subseteq B_\cup$.

Da $B_\cup \cap X \in \mathcal{I}_{M|X}$ ses $|B_\cup \cap X| \leq r(X)$ og tilsvarende $|B_\cup \cap Y| \leq r(Y)$. Da yderligere $B_\cup \cap X \cap Y = B_\cap$ ses som ønsket

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_\cup \cap X| + |B_\cup \cap Y| \\ &= |(B_\cup \cap X) \cup (B_\cup \cap Y)| + |(B_\cup \cap X) \cap (B_\cup \cap Y)| \\ &= |B_\cup \cap (X \cup Y)| + |B_\cup \cap X \cap Y| \\ &= |B_\cup| + |B_\cap| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \end{aligned}$$ □

I beviset for 55 får vi brug for følgende lemma.

Lemma 54. *Lad* $r\colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ *for en endelig mængde* E*. Antag* r *opfylder* (R2) *og* (R3)*. Så gælder for* $X, Y \subseteq E$ *at* baseret på [1, 1.3.3, s. 24]

$$(\forall y \in Y - X\colon r(X \cup y) \leq r(X)) \Rightarrow r(X \cup Y) = X$$

Bevis. Lad $X, Y \subseteq E$ opfylde $\forall y \in Y - X : r(X \cup y) \leq r(X)$. Antag uden tab af generalitet at $X \cap Y = \emptyset$. Lad $Y =: \{y_1, \ldots, y_{|Y|}\}$. Definer $Y_k := \{y_1, \ldots, y_k\}$ for $k = 1, \ldots, |Y|$. Beviset forløber ved induktion i k. Basistilfældet $k = 1$ er trivielt. Antag $r(X \cup Y_k) = r(X)$. Så giver (R2) og (R3) at

$$\begin{aligned} r(X) + r(X) &\geq r(X \cup Y_k) + r(X \cup y_{k+1}) \\ &\geq r((X \cup Y_k) \cup (X \cup y_{k+1})) + r((X \cup Y_k) \cap (X \cup y_{k+1})) \\ &= r(X \cup Y_{k+1}) + r(X) \geq r(X) + r(X) \end{aligned}$$ □

hvormed $r(X \cup Y_{k+1}) = r(X)$, hvilket giver det ønskede.

Vi kan nu fuldføre beviset for 51 ved at bevise 55.

Lemma 55. *Lad* $r : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}_0$ *for en endelig mængde* E*. Antag* r *opfylder* (R1)–(R3)*. Lad* $\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid r(X) = |X|\}$*. Så er* $M := (E, \mathcal{I})$ *en matroide med* $r = r_M$*.* [1, 1.3.2, s. 23]

Bevis. **(I1)**: (R1) giver $r(\emptyset) \leq |\emptyset|$ hvormed $r(\emptyset) = 0$ så $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2): Antag $I \in \mathcal{I}$ og $I' \subseteq I$. Da giver (R3) og $r(\emptyset) = 0$ at

$$r(I') + r(I - I') \geq r(I' \cup (I - I')) + r(I' \cap (I - I')) = r(I) + r(\emptyset) = |I|$$

Af (R1) ses $r(I') \leq |I'|$ og $r(I - I') \leq |I - I'|$. Det giver $I' \in \mathcal{I}$ da ellers

$$|I| \leq r(I') + r(I - I') < |I'| + |I - I'| = |I|$$

(I3): Lad $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ og antag $|I_1| < |I_2|$. Antag for at få en modstrid at (I3) ikke gælder for (I_1, I_2), dvs. $\forall e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$.

Antag $e \in I_2 - I_1$. Da $I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$ giver (R1) og (R2) at $|I_1 \cup e| > r(I_1 \cup e) \geq r(I_1) = |I_1|$. Her af ses $r(I_1 \cup e) = r(I_1)$ hvormed $\forall e \in I_2 - I_1 : r(I_1 \cup e) = r(I_1)$.

Det giver per 54 og (R2) at $|I_1| = r(I_1) = r(I_1 \cup I_2) \geq r(I_2) = |I_2|$. Modstrid.

$\boldsymbol{r = r_M}$: Lad $X \subseteq E$ og $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Antag $x \in X - B$. Da ses $B \cup x \notin \mathcal{I}$ så (R1) og (R2) giver $|B \cup x| > r(B \cup x) \geq r(B) = |B|$. Her af ses $r(B \cup x) = r(B)$ så 54 giver $r(B \cup X) = r(B)$, hvormed $r_M(X) = |B| = r(B) = r(B \cup X) = r(X)$.[7] □

Slutteligt skal vi bevise følgende, som vi får brug for i næste afsnit.

Lemma 56. $\forall X \subseteq E \forall x \in E : r_M(X) \leq r_M(X \cup x) \leq r_M(X) + 1$ [1, 1.4.3, s. 29]

Bevis. Lad $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Da ses $B \in \mathcal{B}(M|X \cup x)$ eller $B \cup x \in \mathcal{B}(M|X \cup x)$, hvormed $r(X \cup x)$ er $r(X)$ eller $r(X) + 1$. □

1.10. **Afslutning.** Vi skal nu se på en generalisering af span i et lineært vektorrum. Hovedresultatet er, at dette giver endnu en karakterisering af matroider.

Definition 57 (Afslutningsfunktion og afslutning)**.** Afslutningsfunktionen *af* M $\mathrm{cl}_M : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ *er givet ved* $\mathrm{cl}_M(X) = \{x \in E \mid r_M(X \cup x) = r_M(X)\}$. $\mathrm{cl}_M(X)$ *kaldes* afslutningen *af* X*.*

Symbolet cl_M kommer fra det engelske "closure".

Følgende sætning giver en måske mere intuitiv fortolkning af afslutning.

Sætning 58. *Afslutningen af* X *er den maksimale mængde mht. inklusion, som indeholder* X *og har samme rang som* X*, dvs.*

(i) $\forall X \subseteq E : X \subseteq \mathrm{cl}_M(X)$

(ii) $\forall X \subseteq E : r_M(X) = r_M(\mathrm{cl}_M(X))$

(iii) $\forall X, Y \subseteq E : ((X \subseteq Y \wedge r_M(X) = r_M(Y)) \Rightarrow Y \subseteq \mathrm{cl}_M(X))$

[7] I [1] deles der i dette bevis op i tilfældene $X \in \mathcal{I}$ og $X \in \mathcal{D}(M)$. Det er tilsyneladende for ikke at antage $x \in X - B$ når $X - B = \emptyset$.

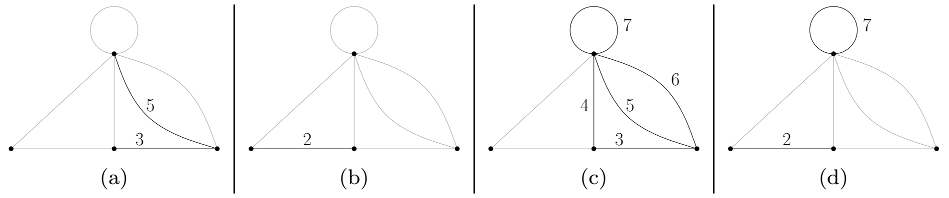
Denne opdeling er imidlertid unødvendig. Det, der skal vises, har formen $\forall x \in A : Px$ for en mængde A og et prædikat P, og den formelle måde at vise sådan noget på er at antage $x \in A$ og så vise Px. Det er også en korrekt fremgangsmåde når $A = \emptyset$.

Bevis. ***(i)***: Trivielt. ***(ii)***: Følger umiddelbart af 54. ***(iii)***: Lad $X, Y \subseteq E$. Antag $r_M(X) = r_M(Y)$ og $X \subseteq Y$. Lad $y \in Y$. Af (R2) ses $r_M(X) \leq r_M(X \cup y) \leq r_M(Y)$ så $r_M(X) = r_M(X \cup y)$ hvormed $y \in \mathrm{cl}_M(X)$. □

Bemærk at der ovenfor også kunne have stået maksimal mht. størrelse.

Eksempel 59. For en vektormatroide $M[A]$ gælder, at afslutningen af $X \subseteq E$ er spannet af X snittet med $E(M[A])$. Således ses $\mathrm{cl}_{M_v}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3,4,5,6\}$ og $\mathrm{cl}_{M_v}(\{3,4\}) = \{3,4,5,6\}$. [1, s. 33]

Eksempel 60. Betragt matroiden M_c fra eksempel 7 og lad $X_a := \{3,5\}$ og $X_b := \{2\}$ jævnfør figur 10(a) og figur 10(b). Så ses $\mathrm{cl}_{M_c}(X_a) = \{3,4,5,6,7\}$ jævnfør figur 10(c), og $\mathrm{cl}_{M_c}(X_b) = \{2,7\}$ jævnfør figur 10(d).



FIGUR 10. Illustration til eksempel 60

Sætning 61 (Karakterisering af matroider ved afslutningsfunktioner)**.** *Lad E være en endelig mængde og* $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$. *Da findes en matroide M på E så* $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}_M$ *hviss* baseret på [1, 1.4.6, s. 30]

(CL1) $\forall X \subseteq E\colon X \subseteq \mathrm{cl}(X)$
(CL2) $\forall X, Y \subseteq E\colon X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$
(CL3) $\forall X \subseteq E\colon \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$
(CL4) $\forall X \subseteq E \forall x, y \in E\colon y \in \mathrm{cl}(X \cup x) - \mathrm{cl}(X) \Rightarrow x \in \mathrm{cl}(X \cup y)$

og en matroide er entydigt givet ved dens afslutningsfunktion.

Bevis. Følger umiddelbart af 62, 63 og 65 nedenfor. □

Lemma 62. cl_M *opfylder* (CL1)–(CL4). [1, 1.4.2, s. 28]

Bevis. **(CL1)**: Trivielt. **(CL2)**: Antag $X \subseteq Y$ og lad $x \in \mathrm{cl}_M(X)$. (CL1) giver $x \in X \subseteq Y$. Af (R3) ses $r_M(Y) + r_M(x) \geq r_M(Y \cup x) + r_M(Y \cap x)$, så da $Y \cap x = x$ giver (R2) at $r_M(Y \cup x) = r_M(Y)$, dvs. $x \in \mathrm{cl}_M(Y)$.

(CL3): 58(ii) giver $r_M(X) = r_M(\mathrm{cl}_M(X)) = r_M(\mathrm{cl}_M(\mathrm{cl}_M(X)))$, og 58(i) giver $X \subseteq \mathrm{cl}_M(X) \subseteq \mathrm{cl}_M(\mathrm{cl}_M(X))$. Her af ses per 58(iii) at $\mathrm{cl}_M(\mathrm{cl}_M(X)) = \mathrm{cl}_M(X)$.

(CL4): Antag $y \in \mathrm{cl}_M(X \cup x) - \mathrm{cl}_M(X)$, dvs. $r_M(X \cup x \cup y) = r_M(X \cup x)$ og $r_M(X \cup y) \neq r_M(X)$. Da giver 56 at $r_M(X \cup y) = r_M(X) + 1$. Af (R2) og 56 ses så

$$r_M(X) + 1 = r_M(X \cup y) \leq r_M(X \cup x \cup y) = r_M(X \cup x) \leq r_M(X) + 1$$

hvormed $r_M(X \cup x \cup y) = r_M(X \cup y)$, dvs. $x \in \mathrm{cl}_M(X \cup y)$. □

Lemma 63. *Lad* $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ *for en endelig mængde E. Antag* cl *opfylder* (CL1)–(CL4)*. Lad* $\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid \forall x \in X : x \notin \mathrm{cl}(X - x)\}$. *Så er* $M := (E, \mathcal{I})$ *en matroide med* $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}_M$. [1, 1.4.4, s. 29]

For at bevise 63 får vi brug for følgende.

Lemma 64. *Lad* cl*, E og $\mathcal{I}$ være som i 63. Da gælder* [1, 1.4.5, s. 30]

$$\forall X \subseteq E \forall x \in E\colon (X \in \mathcal{I} \wedge X \cup x \notin \mathcal{I}) \Rightarrow x \in \mathrm{cl}(X)$$

Bevis. Da $X \cup x \notin \mathcal{I}$ findes $y \in X \cup x$ så $y \in \mathrm{cl}((X \cup x) - y)$. Hvis $x = y$ er vi færdige. Så antag $x \neq y$. Det giver $(X \cup x) - y = (X - y) \cup x$ så da $y \in X \in \mathcal{I}$ ses $y \in \mathrm{cl}((X-y) \cup x) - \mathrm{cl}(X-y)$ hvormed (CL4) giver $x \in \mathrm{cl}((X-y) \cup y) = \mathrm{cl}(X)$. □

Vi beviser nu 63.

Bevis. **(I1)**: Trivielt. **(I2)**: Lad $I \in \mathcal{I}$, $I' \subseteq I$ og $x \in I'$. Da $x \in I$ giver (CL2) at $x \notin \mathrm{cl}(I - x) \supseteq \mathrm{cl}(I' - x)$ så $I' \in \mathcal{I}$.

(I3): Antag for at få en modstrid at (I3) ikke gælder. Da E er endelig, kan vi da lade parret $(I_1, I_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ maksimere $|I_1 \cap I_2|$ under kravene at $|I_1| < |I_2|$ og at (I3) er falsk for parret[8], dvs. $\forall e \in I_2 - I_1 \colon I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$. Lad $y \in I_2 - I_1$.

Antag for at få en modstrid $I_1 \subseteq \mathrm{cl}(I_2 - y)$. Så ses af (CL2) samt (CL3) at $\mathrm{cl}(I_1) \subseteq \mathrm{cl}(I_2 - y)$. Da $I_2 \in \mathcal{I}$ ses $y \notin \mathrm{cl}(I_2 - y)$ hvormed $y \notin \mathrm{cl}(I_1)$. Det giver per 64 at $I_1 \cup y \in \mathcal{I}$, så (I3) er sand for parret (I_1, I_2). Modstrid. Så $I_1 \not\subseteq \mathrm{cl}(I_2 - y)$.

Per ovenstående findes $t \in I_1 - \mathrm{cl}(I_2 - y)$. Af (CL1) og $y \notin I_1$ følger $I_1 - \mathrm{cl}(I_2 - y) \subseteq I_1 - I_2$ hvormed $t \notin I_2$. Af (I2) ses $I_2 - y \in \mathcal{I}$ så da $t \notin \mathrm{cl}(I_2 - y)$ giver 64 at $I_2' := (I_2 - y) \cup t \in \mathcal{I}$. Da yderligere $|I_1| < |I_2| = |I_2'|$ og $|I_1 \cap I_2'| = |I_1 \cap I_2| + 1$ giver maksimaliteten af $|I_1 \cap I_2|$ at (I3) er sand for parret (I_1, I_2'). Altså findes et $x \in I_2' - I_1$ med $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$. Da $x \in I_2 - I_1$ er (I3) dermed sand for (I_1, I_2). Modstrid.

$\mathbf{cl} = \mathbf{cl}_{\boldsymbol{M}}$: Lad $X \subseteq E$. Det er per (CL1) nok at vise $\mathrm{cl}(X) - X = \mathrm{cl}_M(X) - X$.

$\subseteq$: Antag $x \in \mathrm{cl}(X) - X$ og lad $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Antag $y \in X - B$ hvormed $B \cup y \notin \mathcal{I}$. Så giver 64 at $y \in \mathrm{cl}(B)$. Det og (CL1) giver $X \subseteq \mathrm{cl}(B)$ hvormed (CL2) og (CL3) brugt herpå giver $x \in \mathrm{cl}(B)$. Da $x \notin X \supseteq B$ ses her af $B \cup x \notin \mathcal{I}$ hvormed (I3) giver $B \in \mathcal{B}(M|X \cup x)$. Her af ses $r_M(X \cup x) = |B| = r_M(X)$, dvs. $x \in \mathrm{cl}_M(X)$.

$\supseteq$: Antag $x \in \mathrm{cl}_M(X) - X$ og lad $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Her af ses $r_M(X \cup x) = r_M(X)$, så da $x \notin X \supseteq B$ gælder $B \cup x \notin \mathcal{I}$. Det giver per 64 at $x \in \mathrm{cl}(B)$. (CL2) giver $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(X)$ så $x \in \mathrm{cl}(X)$. □

Vi afslutter nu beviset for 61 ved at vise, at man kan finde de uafhængige mængder ud fra afslutningsfunktionen.

Lemma 65. *Der gælder* $\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid \forall x \in X \colon x \notin \mathrm{cl}_M(X - x)\}$. baseret på [1, 1.4.4, s. 29]

Bevis. $\subseteq$: Lad $I \in \mathcal{I}$ og $x \in I$. Da giver 50 at $r_M(I) = |I| > |I - x| = r_M(I - x)$ hvormed som ønsket $x \notin \mathrm{cl}_M(I - x)$.

$\supseteq$: Lad $X \subseteq E$ og antag $\forall x \in X \colon x \notin \mathrm{cl}_M(X - x)$. Lad $B \in \mathcal{B}(M|X)$ og $x \in X$. Hvis $x \notin B$ ville $B \in \mathcal{B}(M|X - x)$ så $r_M(X - x) = |B| = r_M(X)$ i modstrid med $x \notin \mathrm{cl}_M(X - x)$, så $x \in B$. Det giver $X = B$ hvormed $X \in \mathcal{I}$. □

Vi får i den resterende del af dette afsnit brug for følgende sætning.

Sætning 66. $\forall X \subseteq E \, \forall x \in \mathrm{cl}_M(X) \colon \ \mathrm{cl}_M(X \cup x) = \mathrm{cl}_M(X)$ [1, 1.4.8, s. 31]

Bevis. $\subseteq$: Følger umiddelbart af 58(iii). $\supseteq$: Følger umiddelbart af (CL2). □

Da matroider kan defineres både ud fra cykler og afslutningsfunktioner, må man kunne finde cyklerne ud fra afslutningsfunktionen og omvendt. De følgende to sætninger viser, hvordan man kan gøre dette.

Sætning 67. $\mathcal{C}(M) = \min_{\subseteq} \{X \subseteq E \mid X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X \colon x \in \mathrm{cl}_M(X - x)\}$ [1, 1.4.10(i), s. 32]

Bevis. Lad $A := \{X \subseteq E \mid X \neq \emptyset \wedge \forall x \in X \colon x \in \mathrm{cl}_M(X - x)\}$. Det følger så af 65 at $A \subseteq \mathcal{D}(M)$.

$\subseteq$: Antag $C \in \mathcal{C}(M)$ og $x \in C$. Da C er afhængig og $C - x$ er uafhængig giver 50, (R1) og (R2) at $|C - x| = r_M(C - x) \leq r_M(C) < |C|$. Her af ses $r_M(C - x) = r_M(C)$ hvormed $x \in \mathrm{cl}_M(C - x)$. Det giver $C \in A$, og da $C - x \in \mathcal{I}$ ses $C \in \min_{\subseteq} A$.

[8] En læser, der finder, at dette er et misbrug af sproget, vil have fuldstændig ret. I_1 og I_2 er jo bundne af alkvantoren i (I3). Det er dog en praktisk formulering og skulle ikke lede til forvirring.

$\supseteq$: Antag $X \in \min_{\subseteq} A$. Da X er afhængig indeholder den en cykel C. Per ovenstående har vi $C \in A$, hvormed minimaliteten af X giver $X = C$. □

Sætning 68. $\forall X \subseteq E\colon \operatorname{cl}_M(X) = X \cup \{x \in E \mid \exists C \in \mathcal{C}(M)\colon x \in C \subseteq X \cup x\}$ [1, 1.4.10(ii), s. 32]

Bevis. $\subseteq$: Lad $x \in \operatorname{cl}_M(X) - X$ og $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Da $r_M(X \cup x) = r_M(X)$ ses $B \cup x \in \mathcal{D}(M)$. Det giver per 35 et $C \in \mathcal{C}(M)$ med $x \in C \subseteq B \cup x \subseteq X \cup x$.

$\supseteq$: Antag $C \in \mathcal{C}(M)$ og $x \in C \subseteq X \cup x$. Af 67 følger så $x \in \operatorname{cl}_M(C - x)$. Da $C - x \subseteq X$ ses per (CL2) at $x \in \operatorname{cl}_M(X)$. □

Vi vil nu bruge ovenstående til at udfylde den manglende del af beviset for 38 fra afsnit 1.7.

Sætning 69. *Mængden af cykler $\mathcal{C}(M)$ i en matroide opfylder* (C3)$'$*, dvs.* [1, 1.4.11, s. 32]

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M) \forall e \in C_1 \cap C_2 \forall f \in C_1 - C_2 \exists C \in \mathcal{C}(M)\colon f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$$

Bevis. Da $C_2 - e \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e, f\}$ giver 67 og (CL2) i den rækkefølge at

$$e \in \operatorname{cl}_M(C_2 - e) \subseteq \operatorname{cl}_M((C_1 \cup C_2) - \{e, f\})$$

hvormed 67, (CL2) og 66 i den rækkefølge giver

$$f \in \operatorname{cl}_M(C_1 - f) \subseteq \operatorname{cl}_M((C_1 \cup C_2) - f) = \operatorname{cl}_M((C_1 \cup C_2) - \{e, f\})$$

hvormed 68 som ønsket giver et $C \in \mathcal{C}(M)$ med $f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$. □

Følgende definition giver et mere rigt sprog til at diskutere afslutning med. Se eksempel 59 for en motivation af navnene.

Definition 70 (Span og udspændende mængde)**.** *For $X \subseteq E$ kaldes* $\operatorname{cl}_M(X)$ *også* spanet *af X, og X siges at* udspænde $\operatorname{cl}_M(X)$*. Hvis $\operatorname{cl}_M(X) = E$ kaldes X en* udspændende mængde *af M.* [1, s. 31]

Følgende eksempel viser, at afslutningsfunktionen af en matroide ikke i almindelighed er en afslutningsfunktion i topologisk forstand.

Eksempel 71. En afslutningsfunktion $f\colon A \to B$ i topologisk forstand opfylder $\forall X, Y \subseteq A\colon f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, men i M_v ser vi at $\operatorname{cl}_{M_v}(\{1\}) = \{1\}$, $\operatorname{cl}_{M_v}(\{2\}) = \{2\}$ og $\operatorname{cl}_{M_v}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 5\}$. Altså er afslutningsfunktionen cl_{M_v} ikke en afslutningsfunktion i topologisk forstand.

Alligevel bruges ordet afslutningsfunktion, hvilket motiverer følgende definition.

Definition 72 (Lukket mængde)**.** *$X \subseteq E$ er* lukket *hvis $X = \operatorname{cl}_M(X)$.* [1, s. 31]

Lukkede mængder fortjener egentlig en nærmere gennemgang, og de giver i en vis forstand anledning til en karakterisering af matroider. Der er dog desværre ikke plads til at gå nærmere ind på dette emne her.

Følgende sætning kombinerer lukkede mængder og baser.

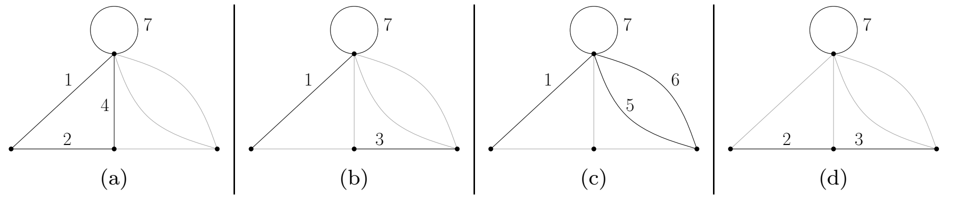
Sætning 73. *Lad X være en lukket mængde og $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Så er X udspændt af B, dvs.* $\operatorname{cl}_M(B) = X$*.* baseret på [1, 1.4.9, s. 31]

Bevis. $\subseteq$: Af (CL2) ses $\operatorname{cl}_M(B) \subseteq \operatorname{cl}_M(X) = X$. $\supseteq$: For $x \in X$ giver (R2) at $r_M(X) = r_M(B) \leq r_M(B \cup x) \leq r_M(X)$ hvormed $x \in \operatorname{cl}_M(B)$. □

Vi kan med ovenstående terminologi generalisere hyperplaner i et vektorrum.

Definition 74 (Hyperplan)**.** *Mængden $X \subseteq E$ er en* hyperplan *af M, hvis den er lukket og $r_M(X) = r_M(E) - 1$. Mængden af hyperplaner af M betegnes $\mathcal{H}(M)$.* [1, s. 31]

Eksempel 75. Følgende er en liste af hyperplanerne i M_c, $\mathcal{H}(M_c) = \{\{1,2,4,7\}, \{1,3,7\}, \{1,5,6,7\}, \{2,3,7\}, \{2,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}\}$. De første 4 af disse fremgår af figur 11. Bemærk at hvis man til nogen af disse hyperplaner tilføjer et enkelt element, får man en udspændende mængde. Det gælder generelt, hvilket bliver bevist nedenfor i form af 76.



FIGUR 11. Illustration til eksempel 75

Følgende sætning, som kan motiveres ved at betragte et lineært vektorrum eller ovenstående eksempel, giver en alternativ karakterisering af hyperplaner.

Sætning 76. *Mængden $X \subseteq E$ er en hyperplan hvis og kun hvis den er maksimal mht. inklusion under kravet at være en ikke udspændende mængde, dvs.* [1, 1.4.9(iii), s. 31]

$$\mathcal{H}(M) = \max_{\subseteq} \{X \subseteq E \mid \mathrm{cl}_M(X) \neq E\}$$

Bevis. $\subseteq$: Lad $H \in \mathcal{H}(M)$. Da $r_M(H) < r_M(E)$ er H ikke udspændende. Lad $x \in E - H$. Da $x \notin H = \mathrm{cl}_M(H)$ ses $r_M(H \cup x) > r_M(H)$ hvormed $H \cup x$ indeholder en basis. Så giver 73 og (CL2) at $\mathrm{cl}_M(X \cup x) = E$, hvormed H er en maksimal ikke udspændende mængde.

$\supseteq$: Lad $X \subseteq E$ være en maksimal ikke udspændende mængde og $B \in \mathcal{B}(M|X)$. Så findes $B' \in \mathcal{B}(M)$ med $B \subseteq B'$. Per 73 er B' udspændende, så der findes $x \in B' - B$. Af 73 og (CL2) ses $X \subseteq \mathrm{cl}_M(X) = \mathrm{cl}_M(B) \subseteq \mathrm{cl}_M(B' - x)$. Vi har $r_M(B'-x) = r_M(E)-1$ hvormed $\mathrm{cl}_M(B'-x)$ er en hyperplan og ikke udspændende, hvormed maksimaliteten af X giver $X = \mathrm{cl}_M(B' - x) \in \mathcal{H}(M)$. □

2. DUALITET

I dette afsnit skal vi se på dualitet, hvilket er et centralt koncept indenfor matroideteorien. I [1] skriver Oxley, at en væsentlig grund til, at man som oftest indskrænker sig til endelige matroider, er, at dualiteten ikke uskadt følger med til det uendelige tilfælde.

2.1. **Definition og grundlæggende egenskaber.**

Sætning 77. *Mængden $\mathcal{B}^*(M) := \{E(M) - B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$ er mængden af baser for en entydig matroide M^* på $E(M)$.* [1, 2.1.1, s. 68]

For at bevise 77 får vi brug for følgende sætning. Forskellen mellem denne sætning og (B2) er illustreret med eksempel 79 nedenfor.

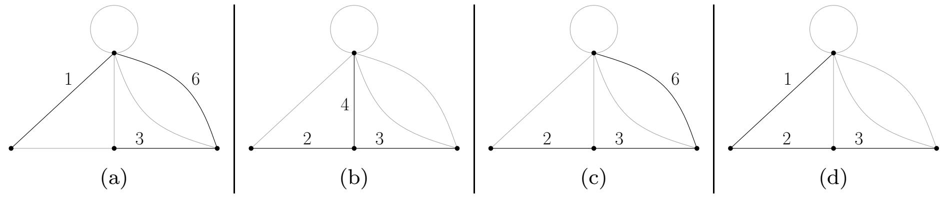
Sætning 78. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M) \forall x \in B_2 - B_1 \exists y \in B_1 - B_2 \colon (B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}(M)$ [1, 2.1.2, s. 68]

Bevis. Lad $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$ og $x \in B_2 - B_1$. Lad $C := C_M(x, B_1)$. Vi kan per (I2) lade $y \in C - B_2$. Da $C \subseteq B_1 \cup x$ ses $y \in C - B_2 \subseteq B_1 - B_2$. Lad $B' := (B_1 - y) \cup x$. Da C er den eneste cykel i $B_1 \cup x$ og $C \nsubseteq B'$ ses $B' \in \mathcal{I}(M)$. Da $|B'| = |B_1|$ giver 21 at $B' \in \mathcal{B}(M)$. □

Eksempel 79. Betragt matroiden M_c og lad $B_a := \{1, 3, 6\}$ og $B_b := \{2, 3, 4\}$ jævnfør figur 12(a) og figur 12(b). Lad $x = 1 \in B_a - B_b$. Både (B2) og 78 siger nu, at der findes et $y \in B_b - B_a = \{2, 4\}$, som opfylder noget, men hvad?

For (B2) betragter man $B_a - x$, og (B2) siger så, at der findes et $y \in B_b - B_a$ så $(B_a - x) \cup y \in \mathcal{B}(M_c)$. I dette tilfælde kan man sætte $y = 2$ jævnfør figur 12(c), men $y = 4$ dur ikke.

For 78 betragter man $B_b \cup x$, og 78 siger så, at der findes et $y \in B_b - B_a$ så $(B_b \cup x) - y \in \mathcal{B}(M_c)$. I dette tilfælde kan man sætte $y = 4$ jævnfør figur 12(d), men $y = 2$ kan også bruges.



FIGUR 12. Illustration til eksempel 79

Vi kan nu gennemføre beviset for 77.

Bevis. Per 22 er det tilstrækkeligt at vise, at $\mathcal{B}^*(M)$ opfylder (B1) og (B2).

(B1): Da $\mathcal{B}(M) \neq \emptyset$ ses $\mathcal{B}^*(M) \neq \emptyset$.

(B2): Lad $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*(M)$ og $x \in B_1^* - B_2^*$. Lad $B_i := E - B_i^*$ for $i = 1, 2$. Da $x \in B_1^*$ og $x \notin B_2^*$ ses $x \in B_2 - B_1$. 78 giver nu et $y \in B_1 - B_2$ så $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}(M)$. Da $y \in B_1$ og $y \notin B_2$ ses $y \in B_2^* - B_1^*$. Vi har

$$(B_1^* - x) \cup y = ((E - B_1) - x) \cup y = E - ((B_1 - y) \cup x) \in \mathcal{B}^*(M) \qquad \square$$

Definition 80 (Dual matroide)**.** *Matroiden M^* fra 77 kaldes den* duale matroide *til M.* [1, s. 69]

Det er klart at $(M^*)^* = M$, hvilket godtgør navnet dual til M^*.

Eksempel 81. Vi skal nu se på, hvorfor vi ikke har indskrænket os til grafer uden loops og parallelle kanter.

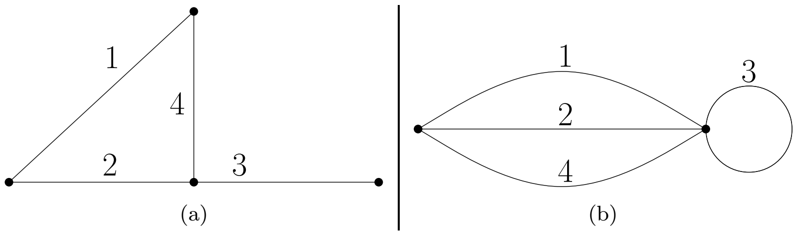
Betragt matroiden $M = M_c|\{1, 2, 3, 4\}$. Matroiden M er indtegnet på figur 13(a), og vi ser, at dens baser er $\mathcal{B}(M) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Ud fra definitionen ser vi så $\mathcal{B}(M^*) = \{\{4\}, \{2\}, \{1\}\}$ hvormed $M = M[G^*]$, hvor G^* er grafen, som fremgår af figur 13(b).

Bemærk at G^* har såvel et loop som parallelle kanter, og enhver graf, som har M^* som cykelmatroide, nødvendigvis også må have dette. Derfor indskrænker vi os ikke til grafer uden loops og parallelle kanter.

Se [1] afsnit 2.3 for en mere effektiv måde til ud fra en plan graf G_p at finde en graf G_d så $M^*[G_p] = M[G_d]$. Da dette dermed altid er muligt, er $M^*[G_p]$ grafisk for enhver plan graf G_p.

Definition 82 (co- og *)**.** *Baserne af M^* kaldes* cobaser *af M. Tilsvarende for* cocykel*,* cohyperplan*,* couafhængig mængde*,* coudspændende mængde *osv. Mængden af cobaser betegnes $\mathcal{B}^*(M)$. Generelt gælder for symboler, som knytter sig til en matroide, at man betegner det tilsvarende symbol for den duale matroide ved at tilføje et *.* [1, s. 70]

Programmet for resten af afsnittet er at undersøge de duale modparter til tidligere definerede koncepter, i det omfang som den følgende del af teksten behøver det. Vi lægger ud med følgende sætning.



FIGUR 13. Illustration til eksempel 81

Sætning 83. *Der gælder for $X \subseteq E$ at* [1, 2.1.6(ii-iii), s. 70]

(i) X er en udspændende mængde hvis og kun hvis $E - X$ er couafhængig, dvs.

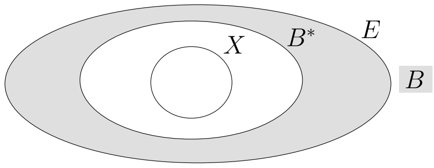
$$\forall X \subseteq E \colon (\mathrm{cl}_M(X) = E \Leftrightarrow E - X \in \mathcal{I}^*(M))$$

(ii) X er en hyperplan hvis og kun hvis $E - X$ er en cocykel, dvs.

$$\forall X \subseteq E \colon (X \in \mathcal{H}(M) \Leftrightarrow E - X \in \mathcal{C}^*(M))$$

Bevis. ***(i)***: Følgende udsagn er ensbetydende. Se nedenfor for en illustration.

(a) $X \in \mathcal{I}^*(M)$
(b) $\exists B^* \in \mathcal{B}^*(M) \colon X \subseteq B^*$
(c) $\exists B \in \mathcal{B}(M) \colon X \subseteq E - B$
(d) $\exists B \in \mathcal{B}(M) \colon E - X \supseteq B$
(e) $\mathrm{cl}_M(E - X) = E$



(ii): Følgende udsagn er ensbetydende per (i) og 76.

(a) X er en hyperplan.
(b) X er ikke udspændende og $\forall y \in E - X \colon X \cup y$ er udspændende.
(c) $E - X$ er coafhængig og $\forall y \in E - X \colon (E - X) - y$ er couafhængig.
(d) $E - X$ er en cocykel. □

Vi vil nu udtrykke corangfunktionen ud fra rangfunktionen.

Sætning 84. $\forall X \subseteq E \colon r^*_M(X) = |X| - r_M(E) + r_M(E - X)$ [1, 2.1.9, s. 72]

For at bevise 84 får vi brug for følgende sætning.

Sætning 85. *Lad $I \in \mathcal{I}(M)$ og $I^* \in \mathcal{I}^*(M)$ være disjunkte. Så findes et $B \in \mathcal{B}(M)$ med $I \subseteq B$ og $I^* \subseteq E - B$.* baseret på [1, 2.1.10, s. 72]

Bevis. Da $I \in \mathcal{I}(M|E - I^*)$ findes $B \in \mathcal{B}(M|E - I^*)$ så $I \subseteq B$. Det ses af 83(i) at $E - I^*$ er en udspændende mængde, hvormed $|B| = r_M(E - I^*) = r_M(E)$, så $B \in \mathcal{B}(M)$. Da $I^* \subseteq E - B$ ses B at opfylde det ønskede. □

Vi kan nu føre beviset for 84.

Bevis. Lad $B^*_X \in \mathcal{B}^*(M|X)$ og $B_{E-X} \in \mathcal{B}(M|E-X)$. Per 85 findes så et $B \in \mathcal{B}(M)$ så $B_{E-X} \subseteq B$ og $B^*_X \subseteq E - B$. Da $B_{E-X} \in \mathcal{B}(M|E-X)$ ses $(E-X) \cap B = B_{E-X}$ og da $E - B \in \mathcal{B}^*(M)$ ses tilsvarende $X \cap (E - B) = B^*_X$. Det giver

$$B = (X \cap B) \uplus ((E - X) \cap B) = (X \cap B) \uplus B_{E-X}$$

hvormed $|B \cap X| = |B| - |B_{E-X}|$. Det ønskede følger nu af, at

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap B| + |X \cap (E - B)| = |B| - |B_{E-X}| + |B^*_X| \\ &= r_M(E) - r_M(E - X) + r^*_M(X) \end{aligned}$$ □

Vi slutter af med følgende to sætninger om forholdet mellem cykler og cocykler.

Sætning 86. *Lad $C \in \mathcal{C}(M)$ og $C^* \in \mathcal{C}^*(M)$. Da gælder $|C \cap C^*| \neq 1$.* [1, 2.1.11, s. 73]

Bevis. Antag $\{x\} := C \cap C^*$. Lad $H := E - C^*$. Så er H en hyperplan per 83. Da $x \in C \subseteq H \cup x$ giver 68 at $x \in \mathrm{cl}_M(H)$. Det er i modstrid med $x \notin H = \mathrm{cl}_M(H)$. $\square$

Sætning 87. *Antag $C \in \mathcal{C}(M)$, $x, y \in C$ og $x \neq y$. Så findes $C^* \in \mathcal{C}^*(M)$ så* [1, 4.2.9, s. 129] *$C \cap C^* = \{x, y\}$.*

Bevis. Da $C - x \in \mathcal{I}(M)$ findes $B \in \mathcal{B}(M)$ med $C - x \subseteq B$. Vi har $y \in B$ og da $C \in \mathcal{D}(M)$ ses $x \notin B$. Lad $B^* := E - B$. Så gælder $B^* \in \mathcal{B}(M^*)$ og $y \notin B^*$, hvormed vi kan definere $C^* := C^*_M(y, B^*)$.

Vi har $C \cap C^* \subseteq C \cap (B^* \cup y) = \{x, y\}$. Da der gælder $y \in C \cap C^*$, og 86 giver $|C \cap C^*| \neq 1$, ses heraf som ønsket $C \cap C^* = \{x, y\}$. $\square$

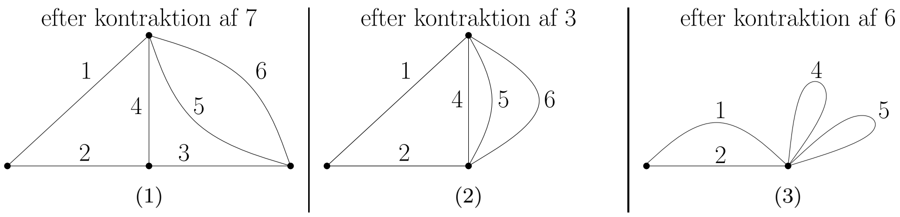
2.2. **Kontraktion.** Vi skal nu se på den duale operation til restriktion. Dette vil i næste afsnit give anledning til et koncept om delstruktur af en matroide, som senere skal vise sig at være centralt blandt andet i forbindelse med karakterisering af binære matroider.

Definition 88 (Kontraktion)**.** *Givet $T \subseteq E$ kaldes $(M^* \backslash T)^*$* kontraktionen *af T* [1, s. 104] *fra M og betegnes M/T.*

Definitionen ovenfor er kort og præcis, men den er desværre også ganske ubehjælpsom, når det kommer til i første omgang at få en fornemmelse for, hvad kontraktion egentlig gør. Følgende eksempel og resten af sætningerne i dette afsnit skulle give et bedre indtryk af dette.

Eksempel 89. Lad G være en graf og lad e være en kant i G. Lad G' være som [1, 3.2.1, s. 111] G, udover at den ikke har e som en kant, og knuderne i hver ende af e er blevet trukket sammen til en enkelt knude. Så gælder $M[G]/e = M[G']$, se [1] for et bevis.

Betragt M_c og lad $M_1 := M_c/7$, $M_2 := M_1/3$ og $M_3 := M_2/6$. Grafer, der har disse matroider som cykelmatroider, fremgår af figur 14.



FIGUR 14. Illustration til eksempel 89

Resten af dette afsnit handler om, hvordan kontraktion berører rangfunktionen, de uafhængige mængder, baserne, afslutningsfunktionen, hyperplanerne og cyklerne. For at få et bedre indtryk af forskellen mellem kontraktion og sletning, holdes disse resultater op mod de tilsvarende for sletning. Det ville blive for omfattende med eksempler til alt dette, men resultaterne kan afprøves på kontraktionerne i eksempel 89 ovenfor.

Først beviser vi følgende 2 tekniske lemmaer, som vi får brug for undervejs.

Lemma 90. *Lad $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Antag at der gælder* [1, 2.1.19, s. 75] *$\forall X \in \mathcal{X}\ \exists Y \in \mathcal{Y}\colon Y \subseteq X$ og $\forall Y \in \mathcal{Y}\ \exists X \in \mathcal{X}\colon X \subseteq Y$. Så er de minimale mængder i $\mathcal{X}$ mht. inklusion netop de minimale mængder i $\mathcal{Y}$ mht. inklusion.*

Bevis. Lad X være minimal i $\mathcal{X}$ mht. inklusion. Da $X \in \mathcal{X}$ findes $Y \in \mathcal{Y}$ så $Y \subseteq X$. Lad $Y' \in \mathcal{Y}$ med $Y' \subseteq Y$. Så findes $X' \in \mathcal{X}$ med $X' \subseteq Y' \subseteq Y \subseteq X$. Da X er minimal mht. inklusion i $\mathcal{X}$ ses her af $Y' = Y = X$, så $X \in \mathcal{Y}$ og X er minimal mht. inklusion i $\mathcal{Y}$. Det ønskede følger nu af symmetrien mellem $\mathcal{X}$ og $\mathcal{Y}$. $\square$

Lemma 91. *Lad $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(E)$ for en endelig mængde E. Antag at der gælder $\forall X \in \mathcal{X}\ \exists Y \in \mathcal{Y}\colon Y \supseteq X$ og $\forall Y \in \mathcal{Y}\ \exists X \in \mathcal{X}\colon X \supseteq Y$. Så er de maksimale mængder i $\mathcal{X}$ mht. inklusion netop de maksimale mængder i $\mathcal{Y}$ mht. inklusion.* baseret på [1, 2.1.19, s. 75]

Bevis. Brug 90 på $\{E - X \mid X \in \mathcal{X}\}$ og $\{E - Y \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ eller tilpas beviset. □

Vi lægger ud med rangfunktionen, da den er grundlaget for de følgende beviser.

Sætning 92. *Lad $T \subseteq E$ og $X \subseteq E - T$. Så gælder*

(i) $r_{M\backslash T}(X) = r_M(X)$ [1, 3.1.5, s. 105]

(ii) $r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T)$ [1, 3.1.6, s. 105]

Bevis. ***(i)***: Trivielt. ***(ii)***: Af (i), 84 og $X \subseteq E - T$ følger

$$\begin{aligned} r_{M/T}(X) &= r_{(M^*\backslash T)^*}(X) = |X| - r_{M^*\backslash T}(E-T) + r_{M^*\backslash T}((E-T)-X) \\ &= |X| - r^*_M(E-T) + r^*_M(E-(T\cup X)) \\ &= |X| - (|E-T| - r_M(E) + r_M(T)) \\ &\qquad + (|E-(T\cup X)| - r_M(E) + r_M(T\cup X)) \\ &= r_M(X\cup T) - r_M(T) \end{aligned}$$ □

Sætning 93. *Lad $T \subseteq E$ og $B \in \mathcal{B}(M|T)$. Så gælder*

(i) $\mathcal{I}(M\backslash T) = \{I \subseteq E - T \mid I \in \mathcal{I}(M)\}$ [1, 3.1.13, s. 107]

(ii) $\mathcal{I}(M/T) = \{I \subseteq E - T \mid I \cup B \in \mathcal{I}(M)\}$ [1, 3.1.8, s. 106]

Bevis. ***(i)***: Dette er definitionen af $\mathcal{I}(M\backslash T)$.

(ii) $\subseteq$: Lad $I \in \mathcal{I}(M/T)$. Da $B \in \mathcal{B}(M|T)$ findes et $B' \in \mathcal{B}(M|I \cup T)$ med $B \subseteq B'$. Heraf ses $B \subseteq B' \cap T \in \mathcal{I}(M|T)$, så da B er en basis ses $B = B' \cap T$ hvormed $B' \subseteq I \cup B$. Af 92 ses

$$|I| = r_{M/T}(I) = r_M(I \cup T) - r_M(T) = |B'| - |B|$$

hvormed $|B'| = |I| + |B| = |I \cup B|$, så $I \cup B = B' \in \mathcal{I}(M)$.

(ii) $\supseteq$: Lad $I \subseteq E - T$ opfylde $I \cup B \in \mathcal{I}(M)$. Da $B \in \mathcal{B}(M|T)$ har vi så $I \cup B \in \mathcal{B}(M|I \cup T)$. At $I \in \mathcal{I}(M/T)$ følger så af, at 92 giver

$$r_{M/T}(I) = r_M(I \cup T) - r_M(T) = |I \cup B| - |B| = |I|$$ □

Sætning 94. *Lad $T \subseteq E$ og $B_T \in \mathcal{B}(M|T)$. Så gælder*

(i) $\mathcal{B}(M\backslash T) = \max_{\subseteq}\{B - T \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$ [1, 3.1.15, s. 107]

(ii) $\mathcal{B}(M/T) = \{B \subseteq E - T) \mid B \cup B_T \in \mathcal{B}(M)\}$ [1, 3.1.9, s. 106]

Bevis. ***(i)***: Beviset er baseret på at bruge 91. Lad $B \in \mathcal{B}(M\backslash T)$. Da $B \in \mathcal{I}(M)$ findes en basis $B' \in \mathcal{B}(M)$ med $B \subseteq B'$. Heraf ses $B \subseteq B' - T$. Lad istedet $B \in \mathcal{B}(M)$. Så ses $B - T \in \mathcal{I}(M\backslash T)$, hvormed der findes en basis $B'' \in \mathcal{B}(M\backslash T)$ så $B - T \subseteq B''$.

(ii): Følger umiddelbart af 93. □

Sætning 95. *Lad $T \subseteq E$ og $X \subseteq E - T$. Så gælder*

(i) $\mathrm{cl}_{M\backslash T}(X) = \mathrm{cl}_M(X) - T$ [1, 3.1.16, s. 107]

(ii) $\mathrm{cl}_{M/T}(X) = \mathrm{cl}_M(X \cup T) - T$ [1, øvelse 3.1.3, s. 110]

Bevis. ***(i)***: Lad $x \in E - T$. Det ønskede følger umiddelbart af, at 92(i) giver

$$r_{M\backslash T}(X \cup x) - r_{M\backslash T}(X) = r_M(X \cup x) - r_M(X)$$

(ii): Lad $x \in E - T$. Det ønskede følger umiddelbart af, at 92(ii) giver

$$\begin{aligned} r_{M/T}(X\cup x) - r_{M/T}(X) &= (r_M(X\cup T\cup x) - r_M(T)) - (r_M(X\cup T) - r_M(T)) \\ &= r_M(X\cup T\cup x) - r_M(X\cup T) \end{aligned}$$ □

Sætning 96. *Lad $T \subseteq E$. Så gælder*

(i) $\mathcal{H}(M\backslash T) = \max_{\subseteq}\{H - T \mid H \in \mathcal{H}(M) \wedge H \cup T \subsetneq E\}$ [1, 3.1.19, s. 108]

(ii) $\mathcal{H}(M/T) = \{X \subseteq E - T \mid X \cup T \in \mathcal{H}(M)\}$ [1, 3.1.20, s. 108]

Bevis. ***(i)***: Beviset er baseret på at bruge 91.

Lad $H \in \mathcal{H}(M)$ og antag $H \cup T \subsetneq E$. Vi har så per 95 at

$$\mathrm{cl}_{M\backslash T}(H - T) = \mathrm{cl}_M(H - T) - T \subseteq \mathrm{cl}_M(H) - T = H - T \neq E - T$$

hvormed H ikke er udspændende i $M\backslash T$, hvormed den per 76 er indeholdt i en hyperplan af $M\backslash T$.

Lad istedet $H \in \mathcal{H}(M\backslash T)$. Da H har samme rang i M og $M\backslash T$, og M mindst har samme rang som $M\backslash T$, er H ikke udspændende i M, hvormed den per 76 er indeholdt i en hyperplan af M.

(ii): Lad $X \subseteq E - T$. Så giver 92 at

$$r_{M/T}(E - T) - r_{M/T}(X) = r_M(E) - r_M(X \cup T)$$

og dertil giver 95 at

$$\mathrm{cl}_{M/T}(X) - X = \mathrm{cl}_M(X \cup T) - (X \cup T)$$

hvormed $X \in \mathcal{H}(M/T)$ hvis og kun hvis $X \cup T \in \mathcal{H}(M)$. □

Sætning 97. *Lad $T \subseteq E$. Så gælder*

(i) $\mathcal{C}(M\backslash T) = \{C \subseteq E - T \mid C \in \mathcal{C}(M)\}$ [1, 3.1.14, s. 107]

(ii) $\mathcal{C}(M/T) = \min_{\subseteq}\{C - T \mid C \in \mathcal{C}(M) \wedge C \nsubseteq T\}$ [1, 3.1.11, s. 107]

Bevis. ***(i)***: Følger umiddelbart af 93.

(ii): Antag uden tab af generalitet at T ikke er tom. Beviset er baseret på at bruge 90. Der er således to ting at vise, og vi vælger at kalde dem $\subseteq$ og $\supseteq$.

(ii) $\subseteq$: Lad $C \in \mathcal{C}(M/T)$ og $B \in \mathcal{B}(M|T)$. Da 93 giver $C \cup B \in \mathcal{D}(M)$ findes et $C' \in \mathcal{C}(M)$ med $C' \subseteq C \cup B$. Lad $e \in C$. Da 93 giver $(C - e) \cup B \in \mathcal{I}(M)$ ses per (I2) at $e \in C'$. Altså har vi $C \subseteq C' \subseteq C \cup B$ hvormed $C = C' - T$.

(ii) $\supseteq$: Lad $C \in \mathcal{C}(M)$ og $T \subseteq E$ med $C \nsubseteq T$. Da $C - T \neq \emptyset$ ses $C \cap T \subsetneq C$ hvormed $C \cap T \in \mathcal{I}(M|T)$. Så findes et $B \in \mathcal{B}(M|T)$ med $C \cap T \subseteq B$. Da $C \in \mathcal{D}(M)$ ses $(C - T) \cup B = C \cup B \in \mathcal{D}(M)$ hvormed 93 giver $C - T \in \mathcal{D}(M/T)$. Så findes et $C' \in \mathcal{C}(M/T)$ med $C' \subseteq C - T$. □

I 97(ii) gives der ikke nogen indikation af, hvilke mængder $C - T$, der er minimale og dermed cykler af M/T. Følgende sætning giver i tilfældet $|T| = 1$ et mere eksplicit krav end minimalitet.

Sætning 98. *Lad $t \in E$ opfylde $\{t\} \notin \mathcal{C}(M)$. Så gælder*[9] baseret på beviset for [1, 9.1.4, s. 307]

$$\mathcal{C}(M/t) = \{C - t \mid C \in \mathcal{C}(M) \wedge t \notin \mathrm{cl}_M(C) - C\}$$

Bevis. $\supseteq$: Lad $C \in \mathcal{C}(M)$ og antag $t \notin \mathrm{cl}_M(C) - C$. Hvis $C - t$ er minimal i mængden fra 97 er vi færdige, så antag for at få en modstrid, at der findes $C' \in \mathcal{C}(M)$ med $C' - t \subsetneq C - t$. Så ses per (C2) at $t \in C' - C$. Vi har $t \in C' \subseteq C \cup t$ hvormed 68 giver $t \in \mathrm{cl}_M(C)$. Modstrid. **$\subseteq$ og $\supseteq$ er eget bevis**

$\subseteq$: Antag $C \in \mathcal{C}(M/t)$. Så giver 97, at der findes et $C' \in \mathcal{C}(M)$ så $C = C' - t$. Hvis $t \notin \mathrm{cl}_M(C') - C'$ er vi færdige, så antag $t \in \mathrm{cl}_M(C') - C'$. Så findes per 68 et $C'' \in \mathcal{C}(M)$ med $t \in C'' \subseteq C' \cup t$. Så giver den allerede viste inklusion at $C'' - t \in \mathcal{C}(M/t)$. Da $C'' - t \subseteq C$ giver (C2) at $C = C'' - t$. □

[9] Denne sætning er implicit til stede i beviset for [1, 9.1.4, s. 307], men den bevises ikke.

Eksempel 99. Vi ser nærmere på 98. Lad M_1, M_2 og M_3 være som i eksempel 89. Disse tre er illustreret med figur 14.

De forhold, hvor 98 siger, at en cykel bevares henover en kontraktion, kan illustreres med kontraktionen af 3 fra M_1. Her går $\{3,4,5\} \in \mathcal{C}(M_1)$ over i $\{4,5\} \in \mathcal{C}(M_2)$, og $\{1,2,4\}$ forbliver en cykel.

Ved en kontraktion med et element, som er i en cykels afslutning men ikke i cyklen selv, vil cyklen ikke blive bevaret henover kontraktionen. Dette skyldes, at cyklen bliver delt op i flere cykler, hvilket kan illustreres med, at $\{1,2,4\} \in \mathcal{C}(M_2)$ har 6 i sin afslutning, og at $\{1,2,4\}$ er en forening af to cykler i M_3.

Det er af følgende årsag ikke umiddelbart muligt at udvide 98 til kontraktion med mere end et enkelt element. I næste afsnit vil vi vise sætning 101, som giver $M_3 = ((M_1)/3)/6 = M_1/\{3,6\}$. Vi har $C := \{1,2,4\} \in \mathcal{C}(M_1)$, men i modsætning til 98 ses $C \notin \mathcal{C}(M_3)$. Dette skyldes, at 6 tilhører afslutningen af C i M_2. Problemet er altså, at afslutningen af en cykel kan udvide sig ved en kontraktion.

2.3. **Minorer.** Vi skal nu se på et koncept om delstruktur af matroider, som senere skal vise sig centralt for at karakterisere binære matroider. Det kan også bruges til at give attraktive karakteriseringer af mange slags matroider.

Definition 100 (Minor)**.** *Givet disjunkte $X, Y \subseteq E$ kaldes matroider på formen $M\backslash X/Y$* minorer *af M.* [1, s. 109]

Minorerne af M opfattes som delstrukturerne af M.

Følgende sætning medfører, at en vilkårlig disjunkt række af sletninger og kontraktioner af en matroide M giver en minor af M. Det betyder specielt, at relationen "er minor af" er transitiv.

Sætning 101. *Lad $T_1, T_2 \subseteq E$ være disjunkte. Så gælder* [1, 3.1.26, s. 109]

(i) $(M\backslash T_1)\backslash T_2 = M\backslash (T_1 \cup T_2)$
(ii) $(M/T_1)/T_2 = M/(T_1 \cup T_2)$
(iii) $(M/T_1)\backslash T_2 = (M\backslash T_2)/T_1$

Bevis. ***(i)***: Vi har

$$\begin{aligned}((E,\mathcal{I})\backslash T_1)\backslash T_2 &= (E - T_1, \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(E - T_1))\backslash T_2 \\ &= ((E - T_1) - T_2, \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(E - T_1) \cap \mathcal{P}(E - T_2)) \\ &= (E - (T_1 \cup T_2), \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(E - (T_1 \cup T_2))) = E\backslash (T_1 \cup T_2)\end{aligned}$$

(ii): Vi har per (i) at

$$((M/T_1)/T_2)^* = ((M/T_1)^*)\backslash T_2 = (M^*\backslash T_1)\backslash T_2 = M^*\backslash (T_1 \cup T_2)$$

så da $(M^*)^* = M$ ses

$$(M/T_1)/T_2 = (M^*\backslash (T_1 \cup T_2))^* = M/(T_1 \cup T_2)$$

(iii): Lad $X \subseteq E - (T_1 \cup T_2)$. Af 92 ses

$$\begin{aligned}r_{(M/T_1)\backslash T_2}(X) = r_{M/T_1}(X) &= r_M(X \cup T_1) - r_M(T_1) \\ &= r_{M\backslash T_2}(X \cup T_1) - r_{M\backslash T_2}(T_1) = r_{(M\backslash T_2)/T_1}(X)\end{aligned}$$

Da de to matroider så har samme rangfunktion, følger det ønskede af 51. □

Eksempel 102. Matroiderne M_1, M_2 og M_3 fra eksempel 89 er minorer af M_c.

3. Karakteriseringer af binære matroider

I dette afsnit skal vi se på en række karakteriseringer af binære matroider, hvoraf den mest attraktive er, at en matroide er binær, hvis og kun hvis den ikke har en minor, som er isomorf med $U_{2,4}$.

Først får vi brug for lidt forarbejde.

Sætning 103. $\forall I \in \mathcal{I} \forall e \in I \exists C^* \in \mathcal{C}^*(M)\colon C^* \cap I = \{e\}$ [1, 9.1.1, s. 303]

Bevis. Lad $I \in \mathcal{I}$ og $e \in I$. Lad $B \in \mathcal{B}(M)$ opfylde $I \subseteq B$. Definer $B^* := E - B$. Vi har så $B^* \in \mathcal{B}^*(M)$ og $I \cap B^* = \emptyset$. Cyklen $C^*_M(e, B^*)$ opfylder nu det ønskede. □

En oplagt måde at bevise at en matroide M er binær, er at konstruere en matrix A så $M \simeq M_{\mathbb{F}_2}[A]$. Følgende definition giver en kandidat til en sådan matrix.

Definition 104 (Fundamental cykelmatrix)**.** *Lad $B \in \mathcal{B}(M)$, $\{b_1, \ldots, b_n\} := B$ og $\{e_1, \ldots, e_k\} := E - B$. Definer $|B| \times |E - B|$ matricen A ved* [1, s. 190]

$$A_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ for } b_i \in C_M(e_j, B) \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

Så er A en B-fundamental cykelmatrix af M.

Eksempel 105. Betragt M_v og lad $B = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{B}(M_v)$. Lad G være en B-fundamental cykelmatrix af M. Vi skal se, at $[I_3|G]$ op til omordning af søjlerne er den selv samme matrix, som vi i første omgang brugte til at definere M_v.

Med fremgangsmåden fra eksempel 37 ses $C_{M_v}(4, B) = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_{M_v}(5, B) = \{1, 2, 5\}$ og $C_{M_v}(6, B) = \{1, 2, 3, 6\}$, hvilket giver det ønskede.

Betragt nu en vilkårlig binær vektormatroide $M_{\mathbb{F}_2}[A]$. Hvis A starter med en identitetsmatrix ses den som ovenfor at bestå af $I_{|B|}$ og en B-fundamental cykelmatrix, hvor B er basen af de første søjler.

Det ses, at matroiden er uændret, hvis man udfører rækkeoperationer, sletter rækker af lutter nuller eller ombytter søjler af A, hvor navnene følger med søjlerne. Således kan A uden at ændre matroiden bringes til at starte med en identitetsmatrix. En fundamental cykelmatrix er altså en god kandidat til en matrix, som kan bruges til at bevise, at en matroide er binær, og det er en af ideerne i beviset for følgende sætning.

Vi kan nu bevise en lang række karakteriseringer af binære matroider.

Sætning 106. *Følgende udsagn er ensbetydende.* [1, 9.1.2, s. 304]

(i) M er binær.

(ii) Den symmetriske forskel af to vilkårlige cykler er afhængig eller tom, dvs.

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)\colon C_1 \triangle C_2 \in \mathcal{D}(M) \cup \{\emptyset\}$$

(iii) Der er et lige antal elementer i snittet mellem enhver cykel og cocykel, dvs.

$$\forall C \in \mathcal{C}(M) \forall C^* \in \mathcal{C}^*(M)\colon\ |C \cap C^*| \text{ er lige}$$

(iv) Den symmetriske forskel af enhver mængde cykler er afhængig eller tom, dvs.

$$\forall \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(M)\colon \triangle_{C \in \mathcal{C}'} C \in \mathcal{D}(M) \cup \{\emptyset\}$$

(v) Den symmetriske forskel af enhver mængde cykler er en disjunkt forening af cykler, dvs.

$$\forall \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}(M) \exists \mathcal{C}'' \subseteq \mathcal{C}(M)\colon \triangle_{C \in \mathcal{C}'} C = \biguplus_{C \in \mathcal{C}''} C)$$

(vi) For enhver basis B er enhver cykel C lig med den symmetriske forskel af de fundamentale cykler til elementerne i $C - B$ med hensyn til B, dvs.

$$\forall B \in \mathcal{B}(M) \forall C \in \mathcal{C}(M)\colon C = \triangle_{e \in C - B} C_M(e, B)$$

(vii) Der findes en basis B så enhver cykel C er lig med den symmetriske forskel af de fundamentale cykler til elementerne i $C - B$ med hensyn til B, dvs.

$$\exists B \in \mathcal{B}(M) \forall C \in \mathcal{C}(M) \colon C = \triangle_{e \in C - B} C_M(e, B)$$

Bevis. ***(i)* $\Rightarrow$ *(ii)***: Da M er binær findes en matrix A, som opfylder $M \simeq M_{\mathbb{F}_2}[A]$. Lad ϕ være en isomorfi fra M til $M_{\mathbb{F}_2}[A]$. Lad $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$.

Per 34 ses ethvert element i en cykel af $M_{\mathbb{F}_2}[A]$ at være summen af de andre elementer. Her af ses $\sum_{e \in C_1} \phi(e) = 0$ og $\sum_{e \in C_2} \phi(e) = 0$ hvilket giver

$$\sum_{e \in C_1 \triangle C_2} \phi(e) = \sum_{e \in C_1} \phi(e) + \sum_{e \in C_2} \phi(e) - 2 \sum_{e \in C_1 \cap C_2} \phi(e) = 0$$

hvormed $C_1 \triangle C_2$ enten er tom eller afhængig.

(ii)* $\Rightarrow$ *(iii): Antag (ii) gælder, men at (iii) ikke gør det. Vi kan da lade $(C, C^*) \in \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}^*(M)$ minimere $|C \cap C^*|$ under kravet at $|C \cap C^*|$ er ulige. Vi har per 86 at $|C \cap C^*| \neq 1$, så der findes mindst 3 forskellige $x, y, z \in C \cap C^*$.

Per 87 brugt på M^* findes et $C' \in \mathcal{C}(M)$ så $C' \cap C^* = \{x, z\}$. Vi kan dermed lade $C_1 \in \mathcal{C}(M)$ minimere $C \cup C_1$ mht. inklusion under kravet at $x \in C_1 \cap C^* \subsetneq C \cap C^* - y$.

Da $x \in C \cap C_1$ og $y \in C - C_1$ findes per (C3)$'$ et $C_2 \in \mathcal{C}(M)$ så $y \in C_2 \subseteq (C \cup C_1) - x$. Da $y \in C \cap C_2$ og $x \in C - C_2$ findes igen per (C3)$'$ et $C_3 \in \mathcal{C}(M)$ så $x \in C_3 \subseteq (C \cup C_2) - y$. Da $x, y \in C$ ses

$$C \cup C_3 \subsetneq C \cup C_2 \subsetneq C \cup C_1 \tag{1}$$

og da så yderligere

$$y \notin C_3 \cap C^* \subseteq (C_1 \cup C) \cap C^* = (C_1 \cap C^*) \cup (C \cap C^*) \subseteq C \cap C^*$$

giver minimaliteten af $C \cup C_1$, at der gælder lighed i (1). Vi har så

$$C_3 - C = C_2 - C = C_1 - C \tag{2}$$

hvormed $C_2 \triangle C_3 \subseteq C$. Da $x \in C_3 - C_2$ ses $C_2 \triangle C_3 \neq \emptyset$ hvormed $C_2 \triangle C_3$ per (ii) indeholder en cykel. Da $C_2 \triangle C_3 \subseteq C$ ses dermed af (C2) at $C_2 \triangle C_3 = C$.

Vi vil gerne vise $C \cap C^* = (C_2 \cap C^*) \uplus (C_3 \cap C^*)$, hvilket ville følge af $C_2 \triangle C_3 = C$, hvis der ikke er nogen elementer, som er i C_1, C_2 og C^* men ikke i C. Der er der lykkeligvis heller ikke, for vi har per (2) at

$$(C_2 \cap C_3 \cap C^*) - C = (C_1 \cap C^*) - C = \emptyset$$

Da $y \in C_2 \cap C^*$ og $x \in C_3 \cap C^*$ er $|C_2 \cap C^*|$ og $|C_3 \cap C^*|$ så strengt mindre end $|C \cap C^*|$ hvormed minimaliteten af $|C \cap C^*|$ giver at $|C_2 \cap C^*|$ og $|C_3 \cap C^*|$ er lige. Så er $|C \cap C^*| = |C_2 \cap C^*| + |C_3 \cap C^*|$ lige i modstrid med valget af (C, C^*).

(iii)* $\Rightarrow$ *(iv): Beviset føres ved kontraposition. Lad $C_1, \dots, C_k$ være cykler så mængden $C_1 \triangle C_2 \triangle \cdots \triangle C_k$ er uafhængig og ikke tom. 103 giver så et $C^* \in \mathcal{C}^*(M)$ med $1 = |C^* \cap (C_1 \triangle \cdots \triangle C_k)| = |(C^* \cap C_1) \triangle \cdots \triangle (C^* \cap C_k)|$. Da der for alle mængder A og B gælder $|A \triangle B| = |A| + |B| \bmod 2$, må der så findes et i så $|C^* \cap C_i|$ er ulige. Altså gælder (iii) ikke.

(iv)* $\Rightarrow$ *(v): Antag (iv) gælder, men at (v) ikke gør det. Vi kan så lade mængden $\{C_1, \dots, C_k\} \subseteq \mathcal{C}(M)$ minimere $\left|\triangle_{i=1}^k C_i\right|$ under kravet at $\triangle_{i=1}^k C_i$ ikke er en disjunkt forening af cykler. Da den tomme mængde er lig den tomme forening af cykler ses $\triangle_{i=1}^k C_i \neq \emptyset$.

Af (iv) følger, at der eksisterer et $C' \in \mathcal{C}(M)$ indeholdt i $\triangle_{i=1}^k C_i$. Eftersom $\left|C' \triangle (\triangle_{i=1}^k C_i)\right| < \left|\triangle_{i=1}^k C_i\right|$ er $C' \triangle (\triangle_{i=1}^k C_i)$ en disjunkt forening af cykler per minimalitet af $\left|\triangle_{i=1}^k C_i\right|$. Ved tilføjelse af C' til denne disjunkte forening ses $\triangle_{i=1}^k C_i$ også at være en disjunkt forening af cykler. Modstrid.

(v)* $\Rightarrow$ *(vi): Antag at (v) gælder, men at (vi) ikke gør det. Dermed findes en basis B og en cykel C så $C \neq \triangle_{e \in C - B} C_M(e, B)$. Så er $C \triangle (\triangle_{e \in C - B} C_M(e, B))$ ikke tom, hvormed (v) giver at den er afhængig.

Da $e \in C_M(e,B) \subseteq B \cup e$ for $e \in C - B$ ses $C - B = (\triangle_{e \in C-B} C_M(e,B)) - B$. Det giver $C \triangle (\triangle_{e \in C-B} C_M(e,B)) \subseteq B$, hvilket per (I2) er i modstrid med ovenstående.

(vi)* $\Rightarrow$ *(vii): Følger umiddelbart af (B1).

(vii)* $\Rightarrow$ *(i): Antag $B \in \mathcal{B}(M)$ opfylder $\forall C \in \mathcal{C}(M) \colon C = \triangle_{e \in C-B} C_M(e,B)$. Lad G være en B-fundamental cykelmatrix af M. Lad $A := [I_{|B|}|G]$ og $M' := M_{\mathbb{F}_2}[A]$. Vi vil nu vise $M = M'$ (jævnfør eksempel 105) ved at vise $\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M')$.

Eftersom B navngiver de første $|B|$ søjler i A, som er lineært uafhængige, ses $B \in \mathcal{I}(M')$. Da A har rang $|B|$ har M' det også hvormed $B \in \mathcal{B}(M')$.

Lad $e \in E(M) - B$. Det ses så per 34 at søjlen i A med navn e er summen af søjlerne med navnene fra $C_M(e,B) - e \subseteq B$ (jævnfør eksempel 37 og 105). Dermed giver 34 at $C_M(e,B) \in \mathcal{C}(M')$. Da $B \in \mathcal{B}(M')$ og $C_M(e,B) \subseteq B \cup e$ ses $C_{M'}(e,B) = C_M(e,B)$ per 35.

$\underline{\mathcal{D}(M) \subseteq \mathcal{D}(M')}$: Lad $D \in \mathcal{D}(M)$. Så findes $C \in \mathcal{C}(M)$ med $C \subseteq D$. Ovenstående og (vii) giver at $C = \triangle_{e \in C-B} C_M(e,B) = \triangle_{e \in C-B} C_{M'}(e,B)$. Da M' er binær, opfylder den per ovenstående (v), så C er en disjunkt forening af cykler fra M'. Altså indeholder D en cykel fra M' hvormed $D \in \mathcal{D}(M')$.

$\underline{\mathcal{D}(M) \supseteq \mathcal{D}(M')}$: Lad $D' \in \mathcal{D}(M')$. Så findes et $C' \in \mathcal{C}(M')$ med $C' \subseteq D'$. Lad $e \in C'$. Da $C' - e \in \mathcal{I}(M')$ findes et $B' \in \mathcal{B}(M')$ med $C' - e \subseteq B'$.

Da $B' \in \mathcal{I}(M')$ og $\mathcal{D}(M) \subseteq \mathcal{D}(M')$ ses $B' \in \mathcal{I}(M)$. Dette og $|B'| = |B|$ giver per 21 at $B' \in \mathcal{B}(M)$. Da $C_M(e,B')$ er en cykel i M, ses den som ovenfor at være en disjunkt forening af cykler. Da den eneste cykel i M', som er er indeholdt i $B' \cup e$, per 35 er C, ses $C = C_M(e,B') \in \mathcal{C}(M)$ hvormed $D' \in \mathcal{D}(M)$. □

For at bevise karakteriseringen ved ekskluderet minor får vi brug for følgende.

Sætning 107. *Lad N være en minor af M. Så er et snit mellem en cykel og en cocykel i N også et snit mellem en cykel og en cocykel i M, dvs.* [1, 9.1.3, s. 307]

$$\forall (C_N, C_N^*) \in \mathcal{C}(N) \times \mathcal{C}^*(N) \exists (C_M, C_M^*) \in \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}^*(M) \colon C_N \cap C_N^* = C_M \cap C_M^*$$

Bevis. Lad $T \subseteq E(M)$. Da N^* er en minor af M^* og $M/T = (M^* \backslash T)^*$, er det tilstrækkeligt at vise det ønskede for $N = M \backslash T$. Lad $C \in \mathcal{C}(N)$ og $C^* \in \mathcal{C}^*(N)$. Vi har $C^* \in \mathcal{C}^*(M \backslash T) = \mathcal{C}(M^*/T)$, så 97 giver at der findes et $A \subseteq T$ som opfylder $C^* \cup A \in \mathcal{C}^*(M)$. Da $C \in \mathcal{C}(M)$ følger det ønskede nu af $C \cap (C^* \cup A) = C \cap C^*$. □

Sætning 108. *Lad $C \in \mathcal{C}(M)$ og $C^* \in \mathcal{C}^*(M)$. Lad $X := C \cap C^* \neq \emptyset$. Så findes en minor N af M så X er en udspændende cykel af både N og N^*.* [1, 9.1.4, s. 307]

Bevis. Lad $N_1 := M/(C - C^*)$. Af 97 brugt $|C - C^*|$ gange ses $X = C - (C - C^*) \in \mathcal{C}(N_1)$ og af 97(i) brugt på M^* ses $C^* \in \mathcal{C}^*(N_1)$. Lad $N_2 := N_1/(C^* - C)$. Der ses tilsvarende $X \in \mathcal{C}(N_2) \cap \mathcal{C}(N_2^*)$.

Af 98 og 97(i) ses, at X forbliver en cykel og cocykel ved sammentrækning af et element fra $E(M) - \mathrm{cl}_{N_2}(X)$ og ved sletning af et element fra $E(M) - \mathrm{cl}^*_{N_2}(X)$. Start med N_2 og fortsæt disse to operationer, så længe de er mulige, hvormed vi til slut opnår en minor, som opfylder det ønskede. □

Vi kan nu bevise den lovede karakterisering ved ekskluderet minor.

Sætning 109. *Det følgende er ækvivalent.* [1, 9.1.5, s. 307]

(i) M *er binær.*
(ii) $\forall C \in \mathcal{C}(M) \forall C^* \in \mathcal{C}(M^*) \colon |C \cap C^*| \neq 3$
(iii) M *har ikke en minor, som er isomorf med* $U_{2,4}$.

Bevis. ***(i)* $\Rightarrow$ *(ii)***: Følger umiddelbart af 106(iii).

(ii)* $\Rightarrow$ *(iii): Beviset forløber ved kontraposition, så antag M har en minor N som er isomorf med $U_{2,4}$. Lad $X \subseteq E(N)$ være en mængde med 3 elementer. Da

X er en cykel og en cocykel af N, giver 107 at X er snittet mellem en cykel og en cocykel af M.

(iii)* ⇒ *(i): Beviset forløber ved kontraposition, så antag at M ikke er binær. Så har M en minor N som ikke er binær, men hvor alle minorer af N er binære bortset fra N selv.

Da N ikke er binær, giver 106(iii), at der findes et $X \subseteq E(N)$, som er et snit mellem en cykel og en cocykel i N, og hvor $|X|$ er ulige. Så giver 108, at N har en minor N', som opfylder, at X er en udspændende cykel af N og N^*. Da $|X|$ er ulige, giver 106(iii) at N' ikke er binær, hvormed minimaliteten af N giver $N' = N$.

Lad $H_0 := E(N) - X$. Da $X \in \mathcal{C}^*(N)$ er H_0 en hyperplan i N per 83(ii), og da X er en udspændende og coudspændende mængde i N giver 83(i) at H_0 er couafhængig og uafhængig i N. Da yderligere $X \in \mathcal{C}(N)$ er udspændende, ses så at

$$|H_0| = r_N(H_0) = r_N(E(N)) - 1 = r_N(X) - 1 = |X| - 2 \tag{3}$$

Da $|X|$ er ulige, ses $|H_0|$ hermed at være ulige hvormed $H_0 \neq \emptyset$. Vi kan dermed lade $y \in H_0$. Da $H_0 \in \mathcal{I}(N)$ ses per 65 at $y \notin \mathrm{cl}_M(H_0 - y)$ hvormed

$$H_0 - y \subseteq \mathrm{cl}_M(H_0 - y) \subseteq \mathrm{cl}_M(H_0) - y = H_0 - y$$

så $H_0 - y$ er en lukket mængde. Per (I2) ses $H_0 - y \in \mathcal{I}(M)$ og (3) giver så at $r_N(H_0 - y) = r_N(E(N)) - 2$.

Lad $H_0, H_1, \ldots, H_m$ være hyperplanerne af N, som indeholder $H_0 - y$. Vi vil nu vise, at $\{H_1 \cap X, \ldots, H_m \cap X\}$ er en partition af X.

Lad $x \in X$ og $I_x := (H_0 - y) \cup x$. Da $x \notin H_0 \supseteq \mathrm{cl}_M(H_0 - y)$ og $H_0 \in \mathcal{I}(N)$ ses $r_N(I_x) = r_N((H_0 - y) \cup x) = r_N(H_0 - y) + 1 = r_N(H_0)$. Altså har vi en hyperplan $\mathrm{cl}_N(I_x)$, som indeholder x og $H_0 - y$.

Lad $1 \leq i, j \leq m$ og antag $x \in H_i \cap H_j \cap X$. Så har vi $I_x \subseteq H_i \cap H_j$. Da I_x har samme rang som H_i og H_j ses $H_i = \mathrm{cl}_N(I_x) = H_j$ hvormed $i = j$. Altså er $\{H_1 \cap X, \ldots, H_m \cap X\}$ en partition af X.

Lad $1 \leq i \leq m$ og $Y_i := (E(N) - H_i) \cap X$. Da H_i er en hyperplan i N ses $E(N) - H_i \in \mathcal{C}^*(N)$ per 83(ii). Da $y \in H_i$ ville medføre $H_i \subseteq H_0$ ses $y \in E(N) - H_i$, så da $y \notin X$ giver (C3) at $X \nsubseteq E(N) - H_i$ hvormed $Y_i \subsetneq X$. Da mængden $E(N) - H_i$ er coafhængig, kan den ikke være indeholdt i $H_0 = E(N) - X$ per (I2) så $Y_i \neq \emptyset$.

Da Y_i er snittet mellem en cykel og en cocykel i N, giver 108 at der findes en minor N_2 af N så Y_i er en udspændende cykel af N_2 og N_2^*. Da Y_i er strengt indeholdt i $X \in \mathcal{C}(N)$ giver (C2) at $\mathcal{C}(N_2) \neq \mathcal{C}(N)$ hvormed $N \neq N_2$, så per minimaliteten af N er N_2 binær. Så giver 106(iii) at $|Y_i|$ er lige. Da $|X|$ er ulige, ses dermed at $|H_i \cap X| = |X| - |(E(N) - H_i) \cap X| = |X| - |Y_i|$ er ulige.

Vi skal nu bruge, at $\{H_1 \cap X, \ldots, H_m \cap X\}$ er en partition af X. Da X er en udspændende mængde i N, er X ikke indeholdt i noget H_i, så $m \geq 2$. Da $|X|$ er ulige og $|X| = \sum_{i=1}^m |H_i \cap X|$ ses dermed $m \geq 3$, for summen af to ulige tal er lige.

Lad $N_3 := N/(H_0 - y)$. Vi vil nu vise, at N_3 opfylder kravene i 110 nedenfor. Det ses, at N_3 har rang 2, thi 92(ii), $H_0 \in \mathcal{I}(N)$ og (3) giver i den rækkefølge at

$$\begin{aligned} r_{N_3}(E(N_3)) &= r_{N/(H_0-y)}(E(N) - (H_0 - y)) \\ &= r_N((E(N) - (H_0 - y)) \cup (H_0 - y)) - r_N(H_0 - y) \\ &= r_N(E(N)) - r_N(H_0) + 1 = 2 \end{aligned}$$

Lad $H_i' := H_i - (H_0 - y)$ for $i = 0, \ldots, m$. Så er $H_0', \ldots, H_m'$ forskellige, da $H_0, \ldots, H_m$ er forskellige og indeholder $H_0 - y$. H_i' er en hyperplan per 96. Da alle hyperplaner har samme rang giver 92(ii) og $H_0 \in \mathcal{I}(N)$ at

$$r_{N_3}(H_i') = r_N(H_i) - r_N(H_0 - y) = (r_N(H_i) - r_N(H_0)) + 1 = 1$$

hvormed 110 nedenfor giver, at $N/(H_0 - y)$ har en minor, som er isomorf med $U_{2,4}$. Dermed har M en minor, som er isomorf med $U_{2,4}$. □

Lemma 110. *Hvis M har rang 2 og M har mindst 4 forskellige lukkede mængder af rang 1, så har M en minor, som er isomorf med $U_{2,4}$.* baseret på [1, s. 52] og [1, 9.1.5 s. 307]

Bevis. Lad $H_0, \dots, H_3$ være forskellige lukkede mængder, som har rang 1. Lad $\{x_i\} \in \mathcal{B}(M|H_i)$ for $0 \leq i \leq 3$. Da ses $\mathrm{cl}_M(x_i) = H_i$ per 73, så $x_0, \dots, x_3$ er forskellige.

Lad $0 \leq i < j \leq 3$. Antag for at få en modstrid $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{D}(M)$. Så ses $r_M(x_i) = 1 = r_M(\{x_i, x_j\})$ hvormed $x_j \in \mathrm{cl}_M(x_i) = H_i$. Da H_i og H_j dermed deler et udspændende element, er de ens. Modstrid. Så $\{x_i, x_j\} \in \mathcal{I}(M)$.

Da M har rang 2, er enhver mængde med flere end 2 elementer afhængig. Dette giver tilsammen, at minoren $M|\{x_0, \dots, x_3\}$ er isomorf med $U_{2,4}$. □

Vi har nu karakteriseret binære matroider ved en ekskluderet minor. Det er et projekt indenfor matroideteori at karakterisere matroider, som er repræsenterbare over henholdsvis $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ og så videre ved ekskluderede minorer. Det er muligt, da alle minorer af en $\mathbb{F}$-repræsentabel matroide også er $\mathbb{F}$-repræsentable jævnfør [1, 3.2.4, s. 112].

Der er indtil videre fundet karakteriseringer ved endeligt mange ekskludere minorer for $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ og $\mathbb{F}_4$. Disse karakteriseringer har vist sig særdeles svære at bevise og finde, og det vides ikke engang for noget $q \geq 5$, at listen af ekskluderede minorer for $\mathbb{F}_q$-repræsentabilitet er endelig!

Ideen om karakterisering ved ekskluderede minorer stopper ikke ved repræsentable matroider. Således er der fundet sådanne karakteriseringer af grafiske og cografiske matroider jævnfør [1, 6.6.5, s. 213] og også af mange andre typer matroider. Karakteriseringer ved ekskluderede minorer er attraktive, blandt andet fordi de giver en ensartet og naturlig måde at karakteriserer mange typer matroider.

4. Algoritmiske aspekter

Dette afsnit giver en smagsprøve af visse algoritmiske aspekter af matroideteori. Hensigten er kun at give et indtryk, så stilen er mindre formel og ikke alt bevises. Der antages desuden en vis datalogisk baggrundsviden, da jeg har datalogi på sidefag, og det ville være meningsløst at genfortælle mine tidligere kurser.

4.1. **Optimering.** Matroider er forbundne med optimering, hvilket vi nu ser på.

Definition 111 (Optimeringsproblem)**.** *Lad E være en endelig mængde, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ og $w\colon E \to \mathbb{R}$. Antag $\mathcal{I}$ opfylder* (I1) *og* (I2)*. Definer $w\colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ ved $w(X) := \sum_{x \in X} w(x)$ for $X \subseteq E$.* Optimeringsproblemet $(\mathcal{I}, w)$ *er at finde et element i $\max_{\subseteq} \mathcal{I}$ som maksimerer w.* [1, s. 62]

Et eksempel på et sådant optimeringsproblem er at finde det letteste udspændende træ i en graf. For at passe dette ind i ovenstående formulering lader man blot $\mathcal{I}$ bestå af træerne og lader w angive vægtene med omvendt fortegn.

Den oplagte grådige algoritme til at løse sådan et optimeringsproblem er at starte med $\emptyset$ og så trinvist udvide med det element, der maksimerer w, under kravet at man holder sig indenfor $\mathcal{I}$. Dette ses at generalisere Kruskals algoritme til at finde det letteste udspændende træ.

Den angivne grådige algoritme virker imidlertid ikke altid, dvs. den producerer ikke altid en løsning til optimeringsproblemet. Det er her, matroider kommer ind i billedet i form af følgende sætning, som ikke bevises.

Sætning 112. *Lad E være en endelig mængde og $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Så er $(E, \mathcal{I})$ en matroide hvis og kun hvis $\mathcal{I}$ opfylder* (I1) *og* (I2) *og den grådige algoritme fra ovenfor løser optimeringsproblemet $(\mathcal{I}, w)$ for enhver funktion $w\colon E \to \mathbb{R}$.* [1, 1.8.5, s. 64]

Det er tankevækkende, at dette umiddelbart medfører korrektheden af Kruskals algoritme. Resultatet ovenfor kan endda yderligere generaliseres til en form, der omhandler greedoids. En greedoid er en matroide, udover at den ikke nødvendigvis opfylder (I2). Der står mere om dette i [4], der har videre referencer.

4.2. **Kompleksiteten af at fastslå om en matroide er binær.** Med den store mængde karakteriseringer af binære matroider fra sidste afsnit er det ikke svært at konstruere en algoritme, der kan fastslå, om en given matroide er binær.

Sætning 109(ii) giver på følgende vis anledning til en sådan algoritme. Find baserne af M med backtracking ved elementvis udvidelse af $\emptyset$. Konstruer M^* ud fra disse. Find nu alle cykler og cocykler med backtracking ved elementvis udtynding af E. Udregn alle snit mellem en cykel og en cocykel. Så er M binær hvis og kun hvis ingen af disse har kardinalitet 3.

At udvide $\emptyset$ kan gennemløbe alle elementerne i $\mathcal{P}(E)$, så den asymptotiske køretid er mindst $O(2^{|E|})$. Omvendt ses, at køretiden er begrænset af et polynomium i $2^{|E|}$.

Lad $f(n)$ være antal forskellige matroider op til isomorfi på en mængde med n elementer. Så gælder der ifølge [1, s. 13] at

$$n - \frac{3}{2}\log_2(n) + O(\log_2(\log_2(n))) \leq \log_2(\log_2(f(n)))$$

hvormed der per skuffeprincippet ikke kan findes en repræsentation af matroider, som asymptotisk fylder mindre end $\Omega(2^{|E|})$. Vi må altså konkludere, at algoritmen ovenfor kører i polynomiel tid i forhold til størrelsen af input. Det er utilfredsstillende, for den er jo "rigtigt" eksponentiel. Derfor skifter man til følgende perspektiv.

Definition 113 (Uafhængighedsorakel)**.** Uafhængigsoraklet *af* M *er indikatorfunktionen af* $\mathcal{I}(M)$*, dvs. funktionen* $f\colon \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}$ *givet ved at* $f(X)$ *er 1 hvis* $X \in \mathcal{I}(M)$ *og 0 ellers.* [1, s. 320]

Vi definerer størrelsen af input til at være $|E|$ og tidsforbruget af at benytte uafhængighedsoraklet 1 gang til at være 1 instruktion. Så er ovenstående algoritme eksponentiel. Hvis den bruger et uafhængighedsorakel til at fastslå uafhængighed, må den endda for nogen input anvende dette eksponentielt mange gange, da den gennemløber alle uafhængige mængder for at finde baserne, og dem kan der være eksponentielt mange af. Følgende sætning siger, at det asymptotisk ikke kan gøres bedre for algoritmer baseret på et uafhængighedsorakel.

Sætning 114. *Der eksisterer intet polynomium* $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$*, så man for ethvert* $n \in \mathbb{N}_0$ *kan fastslå, om en vilkårlig matroide* M *på* n *elementer repræsenteret som et uafhængigsorakel er binær med højst* $f(n)$ *anvendelser af oraklet.* [2, s. 77]

Bevis. Her gives kun formen af beviset. Beviset er nærmere beskrevet i [1, 9.3.16, s. 320] og [2, s. 77]. Formen af beviset er som følger. Lad $M_1 := (E, \mathcal{I})$ være en binær matroide. Lad X være en afhængig mængde i M_1, sådan at $M_2 := (E, \mathcal{I} \cup \{X\})$ også er en matroide, men M_2 er ikke binær. Det er umuligt at skelne mellem M_1 og M_2 uden at spørge uafhængighedsoraklet, om X er uafhængig. Beviset forløber ved at konstruere en følge af stadigt større binære matroider, som har eksponentielt mange mængder, der har samme egenskaber som X ovenfor. $\square$

Det er værd at bemærke, at der på trods af sætningen ovenfor godt kan findes en polynomiel algoritme til at fastslå, om en matroide er binær. Givet en sådan algoritme siger sætningen dog, at input ikke kan være angivet udelukkende ved et uafhængighedsorakel. Et helt trivielt modeksempel er, hvis man får et "er binær"-orakel.

Det kunne være interessant her at undersøge kompleksiteten af at fastslå, om en matroide er binær, givet andre typer orakler og eventuelt flere forskellige orakler på en gang. Det kunne f.eks. være et basisorakel eller et cykelorakel. Desværre tillader plads og tid det ikke.

4.3. **Kompleksiteten af at fastslå om en matroide er grafisk.** I [2] beskrives en polynomiel algoritme til at fastlå om en matroide er grafisk, og den ser vi på i dette afsnit.

Et af trinene af algoritmen i [2] er at kunne fastslå, om en binær matroide givet ved en matrice er grafisk, og i så faldt at kunne finde en graf, der beviser det. For dette trin refereres i [2] til artiklen [3], hvor der beskrives en sådan algoritme. Det ville desværre gå for vidt at gengive den her.[10]

Iøvrigt er det egentlige emne for [3] en algoritme, der reducerer et lineært program til et minimal cost flow-problem. Det gør den hvis og kun hvis det er muligt op til anvendelse af rækkeoperationer og søjleskalering på matricen, der angiver kravene til en feasible løsning. Hensigten er, at man så kan benytte de langt mere effektive minimum cost flow-algoritmer. Grafiske matroider kommer ind, da flow jo foregår i en graf, og algoritmen, der fastslår om en matroide er grafisk, leverer en kandidat til den graf, flowet skal foregå i.[11]

Algoritmen i [2] er baseret på cocykler i en graf, så dem skal vi se lidt på.

Definition 115. *Lad $G := (V, E)$ være en graf. Da kaldes $X \subseteq E$ et* cut *når G har færre sammenhængskomponenter end $(V, E - X)$.* [1, s. 89]

Et cut skærer altså mindst 1 sammenhængskomponent op i flere dele.

Sætning 116. *Cocyklerne af en cykelmatroide er de minimale cuts mht. inklusion.* [1, 2.3.1, s. 89]

Bevis. En mængde er et cut hvis og kun hvis dets komplement ikke indeholder en udspændende skov, hvilket er det samme som at dets komplement ikke er udspændende. Det følgende ses dermed at være ensbetydende.

(a) X er en cocykel.
(b) $E - X$ er en hyperplan (se 83(ii)).
(c) $E - X$ er ikke udspændende, men foreningen af $E - X$ og en vilkårlig kant fra X er en udspændende mængde (se 76).
(d) X er et cut men $X - x$ er ikke et cut for noget $x \in X$. □

Definition 117 (Stjerne)**.** Stjernen *af en knude i en graf er mængden af kanter, der støder op til knuden fraregnet loops.*

Det ses, at stjernen af en knude er en partition af minimale cuts, hvor hvert minimalt cut forbinder knuden med hver sin sammenhængskomponent jævnfør figur 15. Det giver en intuition, der delvist motiverer følgende sætning.

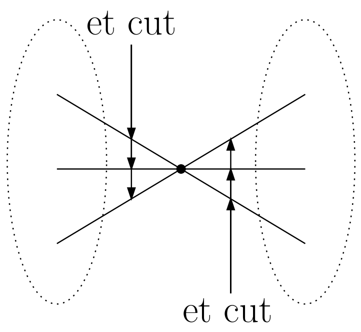
Sætning 118. *Lad G være en graf og lad M være en matroide på kantmængden af G. Så er $M = M[G]$ hvis og kun hvis* [2, baseret på s. 76]

(i) M og $M[G]$ deler en basis.
(ii) Hvert minimalt cut i hver stjerne af G er en cocykel af M.

Vi beskriver nu den lovede algoritme fra [2]. Input er en matroide M i form af et uafhængighedsorakel. Find en basis B af M ved elementvis udvidelse af $\emptyset$. Bestem for hvert $e \in E(M) - B$ den fundamentale cykel $C_M(e, B)$ ved elementvist at udtynde $B \cup e$ til en minimal afhængig mængde. Konstruer ud fra disse en B-fundamental cykelmatrix A af M. Lad $M' := M_{\mathbb{F}_2}[I_{|B|}|A]$.

[10] Faktisk fastslår algoritmen fra [3] om en matroide er cografisk. Det er ikke noget problem, for [1, 2.2.8, s. 81] beskriver, hvorledes man transformerer en matrice for at få en matrice som repræsenterer den duale vektormatroide. Dette er dog noget ugennemsigtigt, for terminologien i [3] er dual af den i [2] og [1], således at grafisk betyder cografisk og omvendt.

[11] Det synes jeg er en overraskende anvendelse af matroider!



FIGUR 15. En stjerne partitioneret i minimale cuts mht. inklusion

Bestem nu ved brug af algoritmen fra [3] om M' er grafisk. Hvis den ikke er det, er M heller ikke grafisk. Det skyldes, at $M = M'$ hvis M er binær, hvilket kan ses ud fra beviset for (vi)⇒(vii)⇒(i) i 106. Hvis M er grafisk (og dermed binær), er M' det altså også, hvilket ved kontraposition giver påstanden. Så hvis M' ikke er grafisk, kan algoritmen stoppe med et "ikke grafisk". Lad i modsat fald G være en graf så $M' = M[G]$.

Hvis M er grafisk er den binær hvormed $M = M' = M[G]$, så M er grafisk hvis og kun hvis $M = M[G]$.

Vi vil anvende 118 til at fastslå om $M = M[G]$. Da M og $M[G]$ begge har B som basis, er kravet 118(i) opfyldt. Vi kan nu gennemløbe hvert minimalt cut fra hver stjerne af G, og skal så se, om disse er cocykler af G. Vi mangler altså nu kun en algoritme til at se, om en mængde er en cocykel ud fra et uafhængighedsorakel.

Per 83(ii) kan vi genkende cocykler, ved at deres komplement er en hyperplan. Per 76 er hyperplanerne de maksimale ikke udspændende mængder, så hvis vi kan genkende udspændende mængder, vil vi kunne genkende hyperplaner ved at teste, at mængden ikke er udspændende, men at enhver udvidelse med et enkelt element er udspændende. En mængde er udspændende hvis og kun hvis den indeholder en basis. Det kan man teste ved elementvist at udvide $\emptyset$ til en maksimal uafhængig delmængde af mængden. Hvis den fremkomne mængde ikke kan udvides yderligere indenfor hele matroiden, er den en basis. Hvis den kan, indeholder mængden ikke en basis.

Altså er der en polynomiel algoritme til at fastslå, om en matroide er grafisk. I lyset af sidste afsnit er det iøvrigt slående, at algoritmen fungerer ved overvejelser indenfor klassen af binære matroider, men stadig er polynomiel.

LITTERATUR

[1] James G. Oxley, Matroid Theory, Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 1992. ISBN 0198535635.

[2] P. D. Seymour, Recognizing graphic matroids. Combinatorica, vol. 1, nr. 1, år 1981 side 75-78

[3] Robert E. Bixby og William H. Cunningham, Converting Linear Programs to Network[...]. Mathematics of Operations Research, vol. 5, nr. 3, år 1980 side 321-357

[4] Wikipedia, Greedoid `http://en.wikipedia.org/wiki/Greedoid`

[5] D. J. A. Welsh, Matroid Theory. Academic Press, London, 1976.

[6] Peter J. Cameron, Polynomial aspects of codes, matroids and permutation groups. `http://www.maths.qmw.ac.uk/~pjc/permgps/notes.html#cmpg`

[7] Joseph E. Bonin, A brief introduction to matroid theory. `http://home.gwu.edu/~jbonin/`

[8] Otfried Cheong, The Ipe extensible drawing editor. `http://ipe.compgeom.org/`

Notation og definitioner

Bilag A. Referenceark

Denne side indeholder informationer, som der ofte bliver refereret til. Hensigten er at lade den være slået ud under læsningen.

Karakterisering ved uafhængighed

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
(I2) $\forall I \in \mathcal{I} \colon \mathcal{P}(I) \subseteq \mathcal{I}$
(I3) $\forall I_1, I_2 \in \mathcal{I} \colon\ |I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 - I_1 \colon I_1 \cup e \in \mathcal{I}$

Karakterisering ved baser

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$
(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 - B_2 \exists y \in B_2 - B_1 \colon (B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

Karakterisering ved cykler

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$
(C2) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} \colon C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$
(C3) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} \colon C_1 \neq C_2 \Rightarrow \forall e \in C_1 \cap C_2 \exists C \in \mathcal{C} \colon C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$
(C3)$'$ $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C} \forall e \in C_1 \cap C_2 \forall f \in C_1 - C_2 \exists C \in \mathcal{C} \colon f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

Karakterisering ved rangfunktion

(R1) $\forall X \subseteq E \colon r(X) \leq |X|$
(R2) $\forall X, Y \subseteq E \colon X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$
(R3) $\forall X, Y \subseteq E \colon r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Karakterisering ved afslutningsfunktion

(CL1) $\forall X \subseteq E \colon X \subseteq \mathrm{cl}(X)$
(CL2) $\forall X, Y \subseteq E \colon X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$
(CL3) $\forall X \subseteq E \colon\ \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$
(CL4) $\forall X \subseteq E \forall x, y \in E \colon y \in \mathrm{cl}(X \cup x) - \mathrm{cl}(X) \Rightarrow x \in \mathrm{cl}(X \cup y)$

Matricen til M_v fra eksempel 4

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Grafen til M_c fra eksempel 7